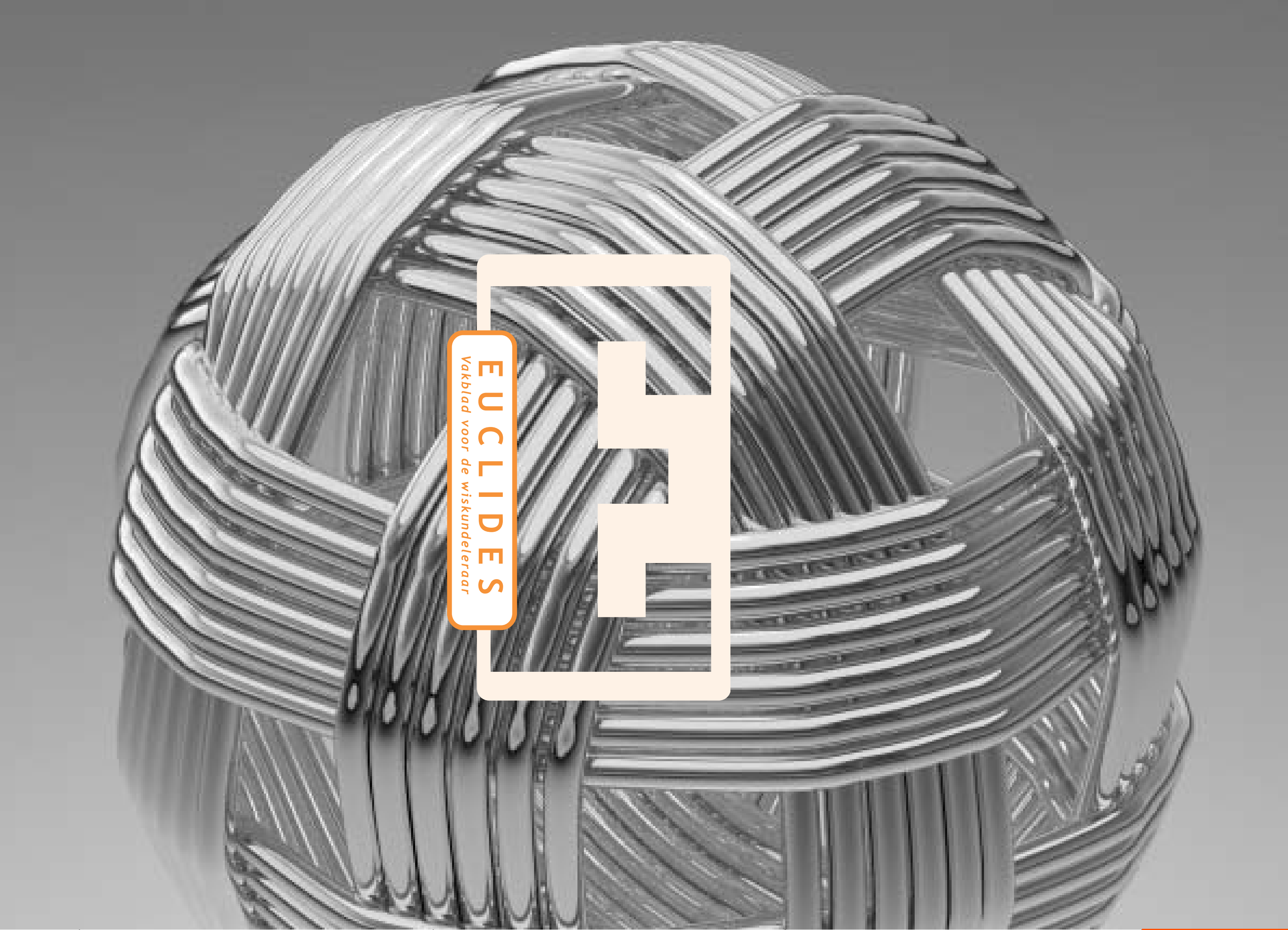
EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

# ICT en wiskunde
# Simulatie op Schiphol
# Algebra
# Jaarvergadering

juni
2004/nr.8
jaargang 79



orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren




8

juni 2004 JAARGANG 79

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394



Inzending bijdragen

Artikelen/mededelingen naar de hoofdredacteur:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen

Tekst liefst digitaal in Word aanleveren, op papier in drievoud.
Illustraties, foto´s en formules separaat op papier aanleveren: genummerd, scherp contrast.
Zie voor nadere aanwijzingen:
www.nvvw.nl/euclricht.html

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter:
Marian Kollenveld,
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: m.kollenveld@nvvw.nl

Secretaris:
Wim Kuipers,
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: w.kuipers@nvvw.nl

Ledenadministratie:
Elly van Bemmel-Hendriks,
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp Groninger Ontwerpers
foto omslag Rinus Roelofs, Hengelo
productie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie per verenigingsjaar

Het lidmaatschap is inclusief Euclides.
Leden: € 42,50
Studentleden: € 22,50
Gepensioneerden: € 27,50
Leden van de VVWL: € 27,50
Lidmaatschap zonder Euclides: € 27,50
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Niet-leden: € 47,50
Instituten en scholen: € 127,50
Losse nummers, op aanvraag leverbaar: € 17,50
Betaling per acceptgiro.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
Gert de Kleuver
De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal
e-mail: g.de.kleuver@wanadoo.nl
tel. 0318-542243

Indien afwezig:
Freek Mahieu
Dommeldal 12, 5282 WC Boxtel
e-mail: freek.mahieu@hetnet.nl
tel. 0411-673468

# INHOUD



# Van de redactietafel

[ Marja Bos ]

## Nieuwe onderbouw

Eerder deze maand presenteerde de Taakgroep Vernieuwing Basisvorming haar voorstellen voor de eerste leerjaren van het voortgezet onderwijs. Belangrijkste kenmerken: meer ruimte voor keuzes van scholen, meer samenhang in het programma, de leerlingen centraal. De bijbehorende nieuwe kerndoelen zijn dan ook in aantal sterk beperkt, en tevens tamelijk globaal geformuleerd, zodat elke school ze binnen de aangegeven kaders zelf nog nader kan uitwerken. Die bewust nagestreefde variëteit zal ertoe leiden dat er veel verschil ontstaat tussen scholen onderling: scholen krijgen steeds meer een 'eigen gezicht'. Het is de bedoeling dat de wijzigingen per 1 augustus 2006 doorgevoerd worden. Voor meer informatie zie *www.vernieuwingbasisvorming.nl*.

## Terugtredend toezicht

De voorstellen van de Taakgroep passen in het beleid van de terugtredende overheid. Ook het fenomeen 'terugtredende docent' is op dit moment populair. Daarnaast ziet het er nu naar uit dat we te maken krijgen met een terugtredende Inspectie.
In een brief van 11 maart geeft minister Van der Hoeven als volgt antwoord op Kamervragen: 'De rol van de Inspectie is in beweging. (…) Het toezicht door de Inspectie zal meer en meer een proportioneel en stimulerend karakter krijgen in samenhang met het versterken van de zelfevaluatie door scholen. (…) Het is de eigen verantwoordelijkheid van de scholen om keuzes te maken in de wijze waarop de kerndoelen concreet vorm krijgen (…) De Inspectie zal vervolgens beoordelen of de gemaakte keuzes juist zijn tegen de achtergrond van kerndoelen en examenprogramma's en de aansluiting op en samenhang binnen de leergebieden.' Kennelijk beperkt de taak van de Inspectie zich straks tot een marginale procedurele (niet-inhoudelijke) toetsing, vanuit de opvatting dat scholen hun kwaliteit in principe zelf adequaat kunnen handhaven, wellicht ondersteund door instrumenten als collegiale wederzijdse toetsing.
Wat vindt *u* er eigenlijk van, van al die terugtredende instanties? Vrijheid voor de eigen school (of voor de directie?), zelf keuzes maken - het biedt beslist fantastische mogelijkheden. Een vraag is wél of we voldoende vertrouwen (mogen) hebben in de eigen kwaliteitsbewaking.

## Voorplaatontwerp Rinus Roelofs

De omslagen van de nummers van deze jaargang van Euclides waren voorzien van prachtige ontwerpen van Rinus Roelofs (zie *www.rinusroelofs.nl*). De laatste uit de serie is een zogeheten *Temari-bal*. Deze gevlochten ballen zijn onder meer bekend vanuit de Japanse cultuur. Ze komen in allerlei vormen voor en zijn vaak gebaseerd op regelmatige of halfregelmatige veelvlakken, in dit geval op een rombische (dus ruitvormige) kuboctaëder.

## Redactie

Twee jaar geleden begon collega Elzeline de Lange vol enthousiasme aan haar vmbo-redacteurschap voor Euclides. Helaas, vervelende omstandigheden maken het haar de komende tijd onmogelijk, de redactiewerkzaamheden goed te kunnen uitvoeren. Om die reden heeft zij haar redactietaken neergelegd. Elzeline, heel veel dank voor je inzet en bijdragen!

## Bijdragen rekenspecial

Het themanummer van de komende jaargang zal in het teken staan van rekenen en rekenonderwijs. Bijdragen van lezers zien we, uiterlijk 1 september a.s., met veel belangstelling tegemoet. Op de webpagina *www.nvvw.nl/euclricht.html* is algemene informatie te vinden over het indienen van concept-artikelen.
Namens de redactie wens ik u graag een fantastische en tegelijkertijd zeer inspirerende zomervakantie.

# DE INVLOED VAN ICT OP HET WISKUNDEONDERWIJS

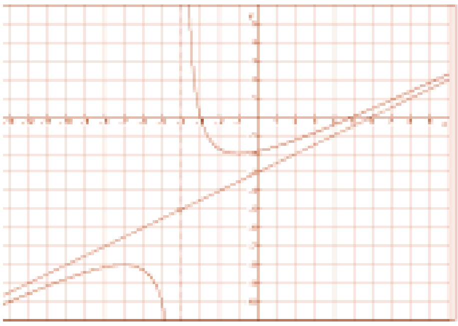
[ Carel van de Giessen ]

## Inleiding

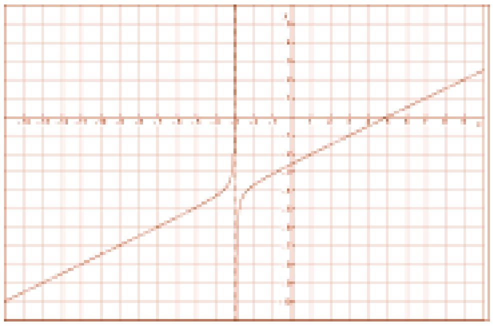
De grafische rekenmachine is gemeengoed in de wiskundeboeken. Logisch, het programma schrijft dit apparaat voor. Daarnaast is ook educatieve software steeds nadrukkelijker aanwezig. Vroeger trof je achter in een boek een practicum over grafieken of statistiek aan. Tegenwoordig kom je in de nieuwe edities ict-paragrafen tegen die reguliere paragrafen kunnen vervangen of strepen naast de tekst die aangeven dat het betreffende gedeelte een ict-component heeft die gebruikt kan worden. De hierboven gebruikte formuleringen *vervangen* en *gebruikt kan worden* geven aan dat het gebruik van ict weliswaar steeds prominenter wordt, maar overigens een vrijblijvende zaak is. De docent kan, dankbaar of niet, gebruik maken van ict bij zijn of haar les, maar kan ook volstaan met de grafische rekenmachine. Die vrijblijvendheid is het gevolg van het feit dat er in het curriculum/programma niets concreets over ict-gebruik, laat staan een verplichting staat. Gezien de tijdsdruk, de faciliteiten voor de scholen en de haast waarin het programma eertijds tot stand is gekomen misschien begrijpelijk, maar wel jammer.
Er is momenteel geschikte technologie beschikbaar voor het onderwijs. Deze kan in principe op twee manieren invloed hebben op het onderwijs: invloed op het reguliere onderwijs en invloed op de vakinhoud. Invloed op het gangbare onderwijs is duidelijk aanwezig gezien de genoemde trend in de boeken waarin ruimschoots van educatieve software en applets gebruik wordt gemaakt. De invloed op het programma is niet duidelijk, althans niet waarneembaar. Bij een curriculum moet je maar afwachten of er iets verandert en zo ja, wat eventuele veranderingen inhouden. De enige aanzet tot ict in het wiskundeprogramma die ik ken, dateert uit de tijd van de HEWET (herverkaveling wiskunde een en twee). Dat is erg lang geleden. De toentertijd veelbelovende ontwikkelingen zijn niet doorgezet.
Hierna wil ik aandacht schenken aan de invloed die ict in deze tijd zou kunnen hebben. Ik beperk me tot enkele domeinen van de schoolwiskunde. Allereerst de analyse: hoe in het reguliere curriculum de inzet van software bij het plotten van grafieken tot leren kan leiden.
Ten tweede bij de beschrijvende statistiek: hoe een inhoud van het curriculum met aandacht voor ict, het vak statistiek voor leerlingen een stuk interessanter kan maken.
Tenslotte vraag ik aandacht voor (dynamisch) modelleren, een onderwerp dat mijns inziens het wiskundig denken bevordert, de vakoverstijgende rol van wiskunde doet ervaren. Een domein dat dankzij ict haalbaar is.

## Analyse: leren door plotten

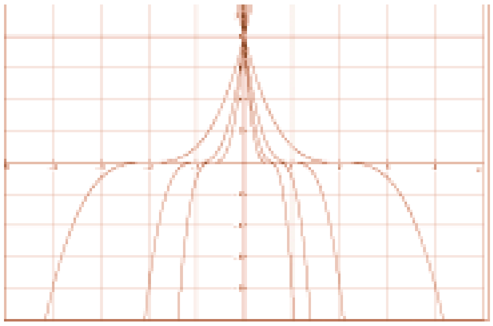
Vroeger bestond een belangrijk deel van de (school)-analyse uit het onderzoeken van een functie. Daar hoorde dan een aantal regeltjes bij waar het onderzoek aan moest voldoen. Doel was het vinden van extremen, nulpunten, asymptoten en andere kenmerken en uiteindelijk de grafiek van de functie. De grafiek was het resultaat van wiskundige arbeid waar meestal ook nogal wat algebra bij kwam kijken. Leerlingen vonden het ook wel aardig, de grafiek was een duidelijk eindpunt dat er fraai kon uitzien.



**FIGUUR 1** $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{2x+8}$



**FIGUUR 2** $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{2x+5{,}98}$



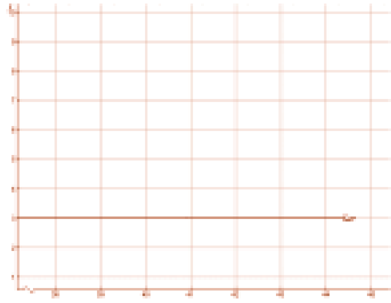
**FIGUUR 3** $f(x)=(2-ax)^3$

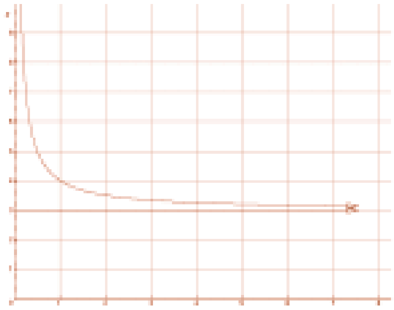
De klassieke manier om een grafiek te vinden zou je als volgt kunnen schematiseren:
*functie → wiskundig werk → grafiek*
Het wiskundig werk dat vroeger aardig wat tijd kostte kan nu gedaan worden door machines. De leerling hoeft alleen een formule in te voeren, een venster in te stellen en eventueel nog wat te tracen, maxen of intersecten. Dat is het dan, klaar; en verder?
Door ict zijn de mogelijkheden tot wiskundige activiteit op een ander gebied verruimd.

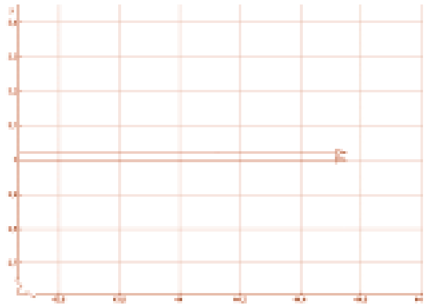
Neem bijvoorbeeld de functie $f(x)=\dfrac{x^2-2x-15}{2x+8}$.

De grafiek verschijnt in een handomdraai (zie figuur 1).
Als je het getal 8 in het functievoorschrift verandert in 9 gebeurt er niet zoveel, maar wel als je bijvoorbeeld de waarde 6 kiest. Van het veranderen van de waarden is het een kleine stap naar parameters. De bijzondere waarde 6 komt dan aan het licht door te spelen met de parameter; zie figuur 2.
Parameters zijn een bron voor wiskundige activiteiten, vooral bij dynamisch gebruik van de parameter. De schuifparameter is prachtig gereedschap om functies te onderzoeken. In de bewegende beelden (in figuur 3 staat weliswaar een bundel, maar die moet als één bewegende grafiek voorgesteld worden) vallen bijzonderheden direct op. Vervolgens kunnen die aan de hand van het functievoorschrift geverifieerd worden. De ict als onderzoeksmedium en bron voor functieonderzoek.
Bekijk bij wijze van voorbeeld de vrij simpele functie $f(x)=(2-ax)^3$. Met de schuifparameter zien de leerlingen onder andere dat de grafiek om een vast punt draait en een buigpunt heeft dat over de $x$-as beweegt. Na dit grafisch onderzoek kan gevraagd worden met behulp van het functievoorschrift aan te tonen dat deze waarnemingen inderdaad juist zijn.
Interessant is ook de constatering dat het buigpunt langzamer beweegt naarmate dit punt dichter bij de oorsprong komt - een lastiger probleem, maar uitdagend om met het functievoorschrift uit te zoeken.
Een probleem waarbij nagedacht en geredeneerd moet worden, geen problemen met standaard oplossingsmethoden.

Dankzij ict zijn er tal van didactische instappen die tot interessante klassengesprekken kunnen leiden, vooral met een computer plus beamer in de klas. Met moderne software is het niet alleen makkelijk om snel een duidelijke grafiek te plotten, er kan ook dynamiek in het plotten gebracht worden. Een plaatje immers zegt meer dan duizend woorden, een dynamisch plaatje voegt daar nog een factor aan toe.
Neem bijvoorbeeld het begrip asymptoot. Uitleggen in woorden is lastig en 'oneindig' wordt vaak als een heel groot getal gezien. Met dynamisch plotten betrek je de leerlingen bij het asymptotisch gedrag. Met de volgende statische figuren is dat enigermate voor te stellen. Figuur 4 geeft aan dat een grafiek en een lijn langzaam getekend worden. In figuur 5 is het tekenproces zover gevorderd dat lijn en grafiek samenvallen, althans dat lijkt zo. In figuur 6 blijkt door in te zoomen dat de grafieken toch niet samenkomen. En dan wordt het proces, zoals dat in figuur 5 en 6 te zien was, herhaald en herhaald enzovoort.







**FIGUUR 4 Hyperbool op weg naar asymptoot**

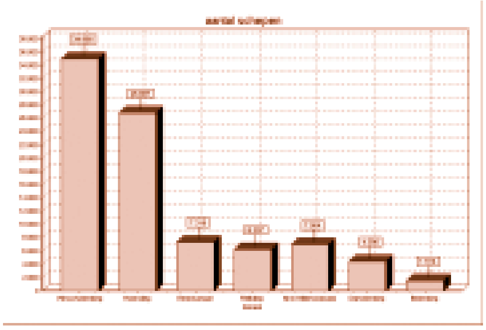
**FIGUUR 5 Grafieken lijken samen te vallen**
**FIGUUR 6 Grafieken vallen niet samen**

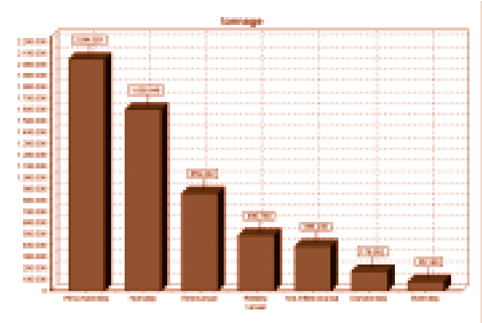
Het eerder gegeven schema
*functie → wiskundig werk → grafiek*
zou er nu zo uit kunnen gaan zien:
*grafiek → wiskundige activiteit → functie.*
Ik maak hier bewust onderscheid tussen wiskundig werk en wiskundige activiteit. Met 'werk' wil ik aangeven dat er een min of meer vast patroon gevolgd moeten worden. Met 'activiteit' wil ik aangeven dat een eigen inbreng van de leerling gevraagd wordt: zelf onderzoeken, vragen stellen en een oplosstrategie bedenken. De wiskundige activiteiten komen tot stand door vragen als: waarom ziet de grafiek er zo uit, hoe zit het met veranderingen van het uiterlijk, hoe kun je die uit de functie afleiden? Het belang van het functieonderzoek wordt het begrijpen van functies en van structuur in functievoorschriften. Bij de beantwoording van dergelijke vragen komt onherroepelijk algebra aan de orde. Vaak blijken leerlingen de problematiek te doorzien en een juist idee van een oplossings-procedure te hebben, maar lopen ze vervolgens vast in de algebra. Met ict wordt het belang van algebra niet verminderd. Integendeel, algebra is en blijft hard nodig.

## Statistiek: werken met data

Statistiek is een domein met een grote maatschappelijke relevantie. Iedereen hoort eigenlijk wel een beetje statistiek te kunnen 'lezen', liefst met een kritische houding. Bovendien speelt statistiek bij veel andere schoolvakken en vrijwel alle voortgezette opleidingen een rol.
De beschrijvende statistiek op school beweegt zich op een tamelijk basaal niveau. Van een beperkt aantal data, die eigenlijk in één oogopslag zijn te overzien, worden gemiddelde, modus en mediaan en standaardafwijking uitgerekend en plaatjes getekend. Niet zo realistisch. Wat zeggen die cijfers van zo'n stuk of tien data eigenlijk? Met de komst van de grafische rekenmachine is dat niet echt verbeterd.
Statistiek wordt pas interessant als het gaat over grote aantallen data die je moet kunnen verwerken, bewerken, manipuleren en presenteren om door de bomen het bos te gaan zien. Met verwerken bedoel ik het invoeren en eenvoudig presenteren van de data in bijvoorbeeld een frequentietabel of diagram. Met bewerken wil ik aangeven dat met de data onderling gerekend wordt om zo nieuwe data te genereren. Manipuleren is het bewerken van data met een minder verheven oogmerk.
Met de computer zijn de mogelijkheden om met data om te gaan wezenlijk veranderd. Het tekenen en berekenen kan uitbesteed worden en de aandacht kan gaan naar het nadenken over wat je met de data wilt bereiken. De leerlingen kunnen data onderzoeken, opvallende zaken en structuur in data ontdekken. Dit domein Data Analyse of EDA (exploratieve data analyse) wordt wel aangegeven met de metafoor van een detective die uit de analyse van data tot veronderstellingen komt en hypothesen formuleert.
Ik geef een paar voorbeelden om toe te lichten hoe zaken ontdekt kunnen worden die zonder de computer verborgen zouden blijven.

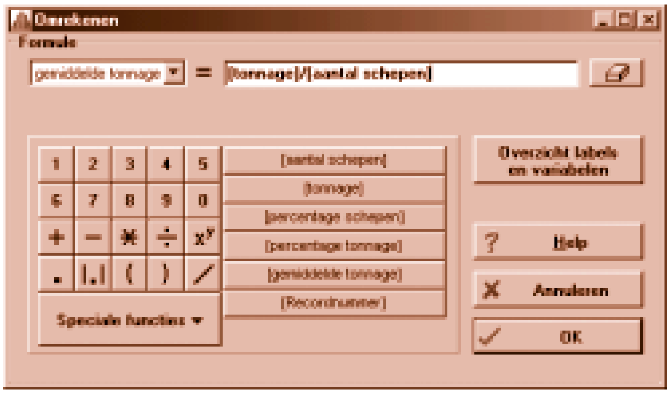
Het eerste voorbeeld gaat over het transport in Groningen in een tijd toen transport over water belangrijk was. In de staafgrafieken van figuur 7 en 8




FIGUUR 7

FIGUUR 8




FIGUUR 9 Omrekenen van data

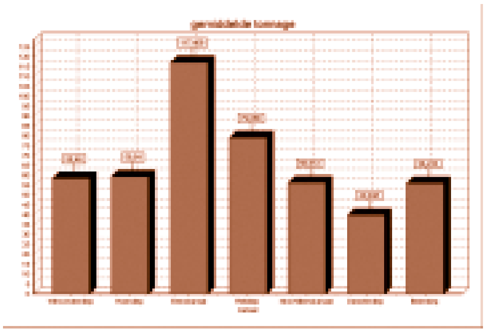
staan gegevens over de scheepvaart, het aantal schepen en de getransporteerde tonnages. De cijfers zijn uit 1910, maar het gaat me om het hanteren van data. Het Winschoterdiep staat bij beide variabelen op de eerste plaats, dat laten de plaatjes duidelijk zien. Als je echter de gemiddelde tonnage per schip uit laat rekenen, ontstaat er een ander beeld (zie figuur 9 en 10). De vraag is nu hoe dat komt; wat voor bijzonders is er met dat Eemskanaal aan de hand?

Het tweede voorbeeld gaat over De Nationale Doorsnee (DND), een grote enquête onder de eerste twee klassen van het voortgezet onderwijs in een feestelijke samenwerking van het CBS en de NVvW (publicatie: najaar 2001). De DND bevat een schat aan gegevens, opgenomen in ruim 50000 records, die op allerlei manieren bekeken kunnen worden. Licht je uit dat bestand de lengten van de leerlingen, dan lijkt bij een beperkt aantal intervalklassen de verdeling er aardig normaal uit te zien (figuur 11). Bij een kleinere klassenbreedte echter treden merkwaardige pieken op; zie figuur 12. De oorzaak daarvan is waarschijnlijk dat veel leerlingen hun lengte hebben afgerond (naar boven?) op 0 of 5. (Met dank aan Heleen Verhage.)

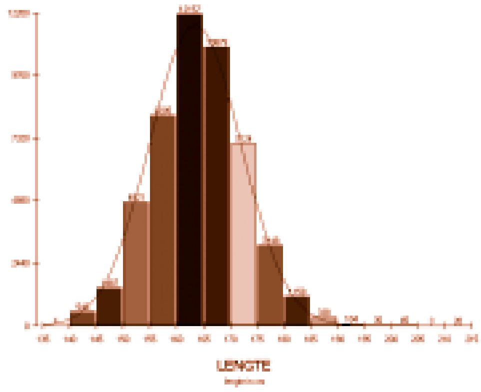
Statistiek is ook binnen school een vakoverstijgend domein. Enquêtes zijn een geliefd onderwerp bij praktische opdrachten voor veel vakken. Doen die andere vakken ook iets aan statistiek? Voor sommige vakken is regressie een belangrijk statistisch item, er zijn zelfs vakken die iets aan mathematisch toetsen doen. Bij het vak aardrijkskunde voor de Tweede fase trof ik in een leerboek de chi-kwadraattoets en Spearmans rangordecorrelatiecoëfficiënt aan, compleet met recept hoe dat uit te voeren. Mijn aardrijkskunde-collega heeft het geprobeerd, één keer was genoeg. Vakoverstijgende opdrachten met wiskunde kunnen heel aardig en bijzonder nuttig zijn. Zonder de nodige aandacht voor afstemming tussen wiskunde en andere vakken zullen de initiatieven meestal tot mislukken gedoemd zijn.

## Aandachtsgebied: modelleren als wiskundige activiteit

Computers voorspellen de uitslag van een verkiezing tot het weer van de komende week, wiskundige modellen spelen een belangrijke rol in het dagelijks leven. Allemaal zijn we indirect consumenten van modellen, of we dat nu leuk vinden of niet. Enige notie van de relevantie en betekenis van modellen is niet ongewenst. Bij realistisch wiskundeonderwijs neemt het toepassen van wiskunde een belangrijke plaats in. Bij toepassingen heb je met modelleren te maken, het beschrijven van de realiteit met behulp van wiskundig gereedschap. In de schoolboeken wordt nogal eens het woord 'model' gebruikt als simpelweg een formule bij een context wordt bedoeld. Een lichtelijk aangedikt taalgebruik met als gevaar dat over modelleren wordt gesproken als bedoeld wordt het omgaan met een formule. Een vrij gangbare omschrijving van het begrip 'wiskundig modelleren' is het vertalen van een realistisch probleem in wiskundige termen. Met het opgestelde model volgt dan een verdere analyse van het probleem met als doel informatie over het probleem te verkrijgen. Met name het vertalen van realiteit naar wiskunde is een moeilijk maar uitdagend en creatief proces. Deze vertaalkant van het modelleren wordt bij



FIGUUR 10




FIGUUR 11

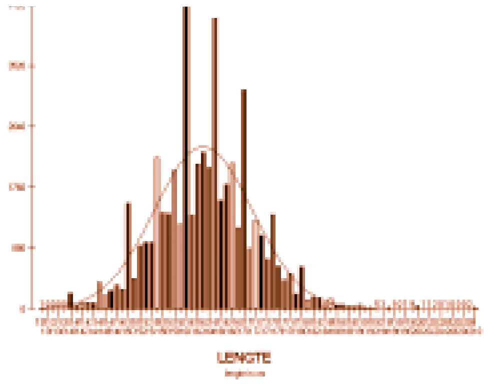
de schoolwiskunde niet structureel behandeld, maar komt bij gebruik van ict nadrukkelijker naar voren. Anderzijds is modelleren door ict in een grafische omgeving goed toegankelijk. Van beide een voorbeeld.

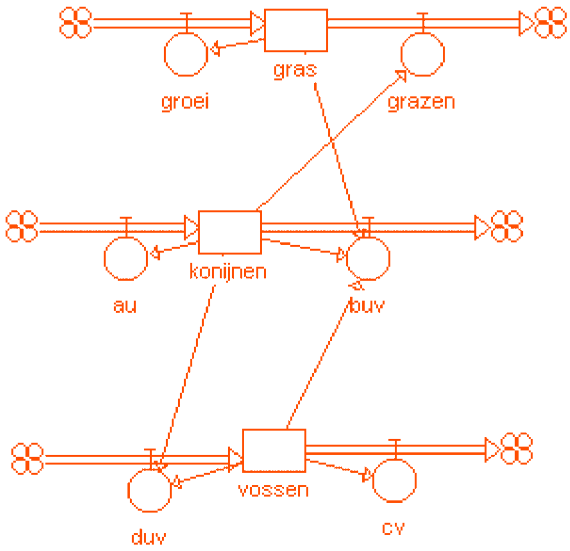
Het eerste voorbeeld leen ik van Paul Drijvers. Een computeralgebrapakket kan erg veel op wiskundig gebied, het nadenken moet de gebruiker doen.
*'Twee kubussen staan naast elkaar en hebben een gezamenlijke breedte van s cm. De inhoud van de twee kubussen samen is d cm³. Druk de lengte van de ribben uit in s en d en ga na welke waarden d kan aannemen.'*
In de klas zou de oplossing als volgt kunnen verlopen:
A. eerst maar eens een plaatje maken en een getallenvoorbeeld doorrekenen;
B. een variabele kiezen, zeg $x$, voor de ribbe van de ene kubus;
C. een formule opstellen voor de inhoud $d(x) = x^3 + (s - x)^3$;
D. de vergelijking $d(x) = x^3 + (s - x)^3$ oplossen naar $x$;
E. de functie $d$ differentiëren, nulpunt uitrekenen, $x = \frac{1}{2}s$;
F. het minimum berekenen, $d = \frac{1}{4}s^3$.
Het grote werk zal voor leerlingen in de punten D, E en F plaatsvinden.
Met gebruik van computeralgebra zit het werk voor de leerling in A, B en C. Punt B is essentieel voor een goede opzet. Verder is het dan een kwestie van het juiste commando, bijvoorbeeld 'Los op' om de vergelijking op te lossen en 'Zoek extreem' voor het berekenen van het minimum. Wat blijft is dus het modelleren en het interpreteren van de uitkomst.
De leerlingen moeten het probleem uiteraard doorzien en daarnaast een gevoel voor structuur en algebraïsch proces bezitten. Dat moet geleerd en geoefend worden en dat kost tijd.
Door ict komt het verschil tussen het kunnen uitvoeren van basisvaardigheden en wiskundig denken duidelijk aan het licht.

Het andere voorbeeld ontleen ik aan mijn schoolpraktijk.
Omdat op mijn school de sectie wiskunde het van belang vindt dat leerlingen kennismaken met modelleren en de rol van wiskunde daarin, gaat in 6-vwo onze zebra daarover. De leerlingen bestuderen in tweetallen zelfstandig een lespakket Dynamische Modellen en maken als afronding een model over een zelf gekozen onderwerp. Om de gedachten te bepalen staat in figuur 13 een schema van een prooi-roofdiersysteem uitgebreid met zelfbegrenzing van de prooidieren (volgens Volterra). Met recursieformules ziet het er zo uit:

$$\begin{cases} u_{i+1} - u_i = au_i - bu_iv_i - eu_i^2 \\ v_{i+1} - v_i = -cv_i + du_iv_i \end{cases}$$

De leerlingen ervaren dat er een wereld van verschil bestaat tussen een kwantitatief en een kwalitatief model - dat het lastig is de goede data te vinden, dat je bij een model maken moet nadenken. Ze begrijpen hoe relaties liggen en dat je door te modelleren inzicht in processen verwerft. Maar ook ervaren ze hoe belangrijk en hoe functioneel wiskunde is. Ze komen met vragen hoe je met wiskunde een proces stochastisch, voorwaardelijk, vertraagd, enzovoort kunt maken. Ze




**FIGUUR 12**

**FIGUUR 13 Schema prooi-roofdiermodel met zelfbegrenzing**

komen in aanraking met begrippen uit andere vakken zoals feedback (dat ze kennen als homeostase bij biologie) en vertragingseffecten (die ze kennen van de varkenscyclus bij economie).
De leerlingen zijn veelal aangetrokken door de creatieve kanten van het modelleren die al met eenvoudige wiskundige vaardigheden toegankelijk zijn. De uitdaging zit in het bouwen, de lol zit in de experimenteermogelijkheden die tot begrip en inzicht in complexe situaties kunnen leiden. Een model is een speeltuin, een onderzoeksomgeving, een microwereld. Modelleren bevordert het denken en komt dankzij ict beter dan voorheen binnen het bereik van de schoolwiskunde.

## Conclusies

In dit artikel heb ik willen aangeven dat ict in het wiskundeonderwijs twee aspecten heeft:
- Inzet van ict bij het bestaande programma waarmee beter begrip en aantrekkelijke leeractiviteiten nagestreefd kunnen worden. Dit proces is sterk gaande. In de schoolboeken is dat goed te zien.
- Inzet van ict om bestaande domeinen andere accenten te geven en nieuwe domeinen te introduceren. Voorbeelden zijn leren door plotten, Data Analyse en Dynamisch Modelleren. Daarbij passen leeractiviteiten die bij gebruik van goede software dynamische impulsen aan de schoolwiskunde kan geven.
Ict kan leerlingen werk uit handen nemen. De ruimte die daardoor ontstaat zou ingevuld kunnen worden door wiskundeonderwijs dat gericht is op datgene waarin de mens beter is dan de pc: creatief denken en slim interpreteren.

*Bronnen*


- *Advies Examenprogramma havo/vwo.*
- *Jan Blankespoor: Het nieuwe imago van de wiskunde in het hbo. In: Euclides 76 (2), oktober 2000.*
- *D.N. Burghess e.a.: Applying Mathematics. Ellis Horwood Limited, isbn 0-85312-417-5.*
- *G.G. Chakerian, Kurt Kreith: Iterative Algebra and Dynamic Modeling. Springer Verlag (1999), isbn 0387987584.*
- *Examenprogramma's havo, vwo.*
- *F. Goffree e.a.: Honderd jaar wiskundeonderwijs. NVvW, isbn 90-01-65958-6. p. 375.*
- *Walter J. Meyer: Concepts of Mathematical Modeling. McGraw-Hill, isbn 0-07-041747-4.*
- *Hans Stam, Peter van Wijk: Computergebruik bij wiskunde. APS, isbn 90-6607-337-3.*
- *Terra (methode voor aardrijkskunde), handboek vaardigheden en werkwijzen. Wolters-Noordhoff, isbn 90-01-73402-2.*


*De computervoorbeelden zijn ontleend aan de volgende softwarepakketten: VUGrafiek 2004, VUStatistiek 2004, Dynasys.*

*Over de auteur*

*Carel van de Giessen (e-mailadres: carelvdg@tref.nl), werkzaam aan het Almende College te Silvolde, is bijzonder geïnteresseerd in het gebruik van de computer bij het wiskundeonderwijs. Hij hoopt op serieuze aandacht voor ict en vakoverstijgende afstemming in het curriculum. Gezien zijn ervaringen in de voorbereiding van de tweede fase is hij echter niet optimistisch gestemd.*

# Wachten op één bediende

Voor de presentatie wordt verondersteld dat de gemiddelde bedieningstijd per klant precies 1 minuut bedraagt.

De formule voor de wachttijd, of preciezer de verblijftijd, voor een faciliteit met één bediende luidt dan:

$$\mathbf{V} = \frac{1}{1-\rho} \text{ en } \mathbf{W} = \mathbf{V} - 1 \qquad (1)$$

met:
**V**: de gemiddelde verblijftijd in minuten per klant;
**W**: de gemiddelde wachttijd in minuten per klant;
$\rho$: de fractie van de tijd dat de bediende bezig is (de bezettingsgraad).

Hierbij wordt verondersteld dat $\rho < 1$. Bij een gemiddelde aankomstintensiteit van 9 klanten per 10 minuten geldt dus:

$$\mathbf{V} = 1 / (1 - 0{,}9) = 10 \text{ minuten en } \mathbf{W} = 9 \text{ minuten}$$

In dit vrij realistische geval waarbij de bediende voor 90% van zijn tijd met werk belast is, geldt dus dat een klant voor 1 minuut bediening 10 keer zo lang aanwezig is en 9 minuten moet wachten.

Een formele afleiding van de wachttijdformule vereist in feite een nadere bespreking van impliciet veronderstelde zogenaamde exponentiële randomness alsmede stellingen uit de kansrekening. Een intuïtief bewijs is echter vrij eenvoudig te geven. Essentieel hiertoe is de beroemde formule van Little:

$$\mathbf{L} = \lambda \times \mathbf{V} \qquad (2)$$

met:
**L**: gemiddeld aantal klanten dat zich in het systeem bevindt (inclusief de klant in bediening);
$\lambda$: het aantal klanten dat per minuut arriveert (omdat de gemiddelde bedieningsduur 1 minuut bedraagt geldt hier ook $\lambda = \rho$).

Deze relatie is eenvoudig in te zien als men **L** als werklast opvat en $\lambda$ als outputintensiteit.

Bijvoorbeeld, als gemiddeld per week $\lambda$ = 100 patiënten het ziekenhuis ingaan (en dus ook verlaten) en de gemiddelde verblijfduur per patiënt **V** = 2,5 weken bedraagt, dan zullen op een willekeurig moment gemiddeld **L** = 100×2,5 = 250 patiënten in het ziekenhuis verblijven.

Of indien een fabriek gemiddeld per week $\lambda$ = 200 auto's moet fabriceren en de gemiddelde productietijd per auto **V** = 3 weken bedraagt, dan zullen zich op een willekeurig moment gemiddeld **L** = 200×3 = 600 auto's in productie (moeten) bevinden.

Voor de afleiding van de wachttijdformule merk nu vervolgens op dat een arriverende klant moet wachten totdat alle aanwezige klanten **L** (**L**-1 wachtend en één in bediening), geholpen zijn. De totale verblijftijd, inclusief de eigen bediening, bedraagt dus voor een zojuist gearriveerde klant:

$$\mathbf{V} = \mathbf{L} + 1 \qquad (3)$$

Dus met (2) en $\lambda = \rho$

$$\mathbf{V} = \rho \times \mathbf{V} + 1 \qquad (4)$$

Hoewel formule (1) hiermee wiskundig direct volgt, is voor een verder begrip de volgende afleiding zeker zo aardig. Omdat $\rho < 1$ als fractie kan worden gezien, geldt eveneens:

$$\mathbf{V} = \rho \times \mathbf{V} + (1 - \rho) \times \mathbf{V} \qquad (5)$$

Als men de twee gelijkheden (4) en (5) vergelijkt, blijkt dus dat van de totale verblijftijd **V** slechts een fractie $(1 - \rho)$ wordt besteed aan de eigen bedieningstijd (van 1 minuut). In het rekenvoorbeeld met 9 klanten per 10 minuten ($\rho = 0{,}9$) betekende dit dus slechts 10% van de verblijftijd.

In de bovenstaande afleiding is een 'gedachtefout' gemaakt, namelijk dat ook de klant in bediening nog 1 minuut gemiddelde bedieningstijd vereist. Dit komt overeen met de in de wachttijdtheorie veelal gehanteerde zogenaamde exponentiele aanname (een soort geheugenloosheidseigenschap).

Zonder deze aanname zijn analytische resultaten (formules) nagenoeg niet beschikbaar. Het (explosieve) karakter van formule (1) blijft echter in het algemeen wel behouden. Ter illustratie, indien de bedieningstijd per klant exact 1 minuut is, zal de gemiddelde resterende bedieningstijd van de klant in bediening overeenkomstig intuïtie een ½ minuut bedragen. Gelijkheid (3) wordt dan volgens dezelfde redenatie:

$$\mathbf{V} = (\mathbf{L}-1) + \tfrac{1}{2} + 1 = \mathbf{L} + \tfrac{1}{2}$$

en dus, op dezelfde wijze

$$\mathbf{V} = \tfrac{1}{2}\,(1-\rho)^{-1}$$

Ontleend aan:
N.M. van Dijk: *Altijd in de verkeerde rij,* in: Natuur en Techniek (12 december 1996, p. 10-21).

# OPTIMAAL INCHECKEN OP SCHIPHOL

## Computersimulatie en wiskunde in combinatie

[ Nico van Dijk en Erik van der Sluis ]

*In het najaar van 2003 vond aan de Universiteit van Amsterdam een themadag plaats voor vwo-wiskundedocenten, georganiseerd door de opleiding Operationele Research & Management, met als doelstelling:*
*- kennisverbreding voor de docent met eigentijdse wiskundetoepassingen;*
*- mogelijke toepassing in één van de wiskundeprogramma's binnen de profielen E&M, N&G en N&T;*
*- kennismaking met simulatie.*
*Dit artikel bevat een beknopte weergave van enkele van de gepresenteerde onderwerpen. In oktober 2004 wordt deze dag herhaald. Eventuele belangstelling voor deze dag kan kenbaar worden gemaakt via e-mail: H.J.vanderSluis@uva.nl.*

### Aanleiding

Dit artikel is geschreven naar aanleiding van een themadag voor vwo-wiskundedocenten. Het belicht een 'eenvoudig' praktisch probleem, het inchecken op Schiphol. Met dit probleem worden zowel de noodzakelijkheid als de mogelijkheden geïllustreerd van een 'hedendaags' wiskundige benadering voor praktische optimalisatie: wiskundige modellering en computersimulatie in combinatie.

### Inleiding

Met een vakantie voor de boeg met mogelijk verre bestemming is enige wiskundige bezinning wellicht op zijn plaats voor een praktische probleemstelling waarmee de vakantie mogelijk aanvangt: (lange) wachttijden zoals voor het inchecken op Schiphol (zie figuur 1). Een ogenschijnlijk eenvoudig op te lossen probleem door uitbreiding van balies en personeel. Echter, nog los van de beperkte mogelijkheden hiertoe is dit slechts ten dele het geval. Er is sprake van een complexe situatie en behoefte aan optimalisatie waarvoor verschillende wiskundige disciplines vereist zijn, gericht op:

1. het vooraf berekenen van wachttijden (prestatieberekening),
2. het toewijzen van balies aan vluchten (planning).

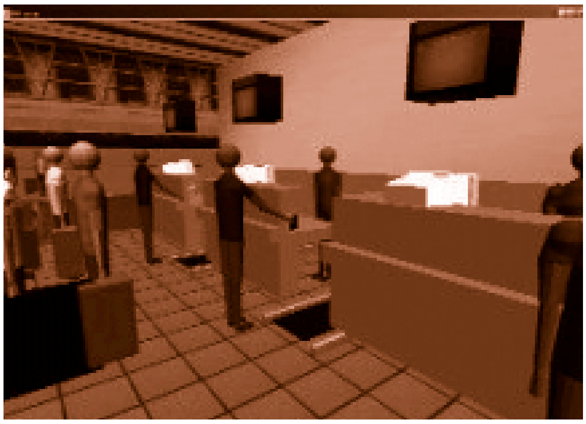
Naast de hiervoor ontwikkelde wiskundige modellen, wezenlijk voor inzicht in de wachttijdberekening en voor de planning, blijkt ook computerondersteuning strikt noodzakelijk. In het eerste geval is dat computersimulatie vanwege realistische complicerende aspecten waarvoor wiskundige modellering tekort schiet, in het tweede geval LP-software voor het kunnen oplossen van deze wiskundige modellen.

Het check-in probleem mag gezien worden als illustratie van een ogenschijnlijk eenvoudig praktisch probleem, zoals zo vele andere uit het dagelijks leven, waarvoor een nieuwe vorm van wiskundige benadering strikt noodzakelijk is. Deze benadering is gebaseerd op een combinatie van:
- wiskundige modellering, en
- computerondersteuning.

De globale doelstelling van dit artikel is het toelichten en illustreren van deze combinatie - aan de hand van het check-in probleem. Een drietal wiskundige onderwerpen zal hiertoe de revue passeren:
*Wachttijdtheorie,* als wiskundige discipline voor niet alleen het berekenen van wachttijden maar (vooral) ook voor het verschaffen van kwalitatieve inzichten op analytische basis.
*Computersimulatie*, primair als noodzakelijke rekentechnische ondersteuning voor het berekenen van wachttijden in meer realistische complexere situaties.
*Wiskundige modellering,* in dit geval lineaire programmering, voor het minimaliseren van benodigde capaciteiten.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

## Wachttijdtheorie

Waarom doen wachttijden zich überhaupt voor? In het algemeen moet er toch wel voldoende capaciteit zijn, anders zouden de systemen niet goed ontworpen of gedimensioneerd zijn en zou bij een daadwerkelijk tekort aan capaciteit de wachttijd alleen maar kunnen groeien. Dit zijn vragen waarvoor het gebied van de wachttijdtheorie ('queueing theory') beoogt inzichten te verschaffen en wiskundige onderbouwing (formules) te geven gebaseerd op kansrekening. En zijn wachttijden niet te voorspellen of beter nog met formules te benaderen?

*Queueing theory is een specialisatie binnen de wiskundige discipline van de Operationele Research, aanvankelijk ontwikkeld vanuit de telefonie omstreeks 1920. Thans strekt deze discipline zich uit naar een grote diversiteit aan toepassingsvelden, zoals call centers, mobiele telefonie, computertechnologie, productielijnen, administratieve processen, logistiek, ziekenhuizen.*

Inderdaad, binnen de wachttijdtheorie bestaat een groot scala aan formules, zoals de formule in het kader voor de gemiddelde verblijftijd (= wachttijd + bedieningstijd) voor de meest eenvoudige situatie van één enkele balie of loket: het zogenaamde één-server- of M/M/1-model (zie ook pagina 340, Wachten op één bediende).

Deze formules en hun onderliggende afleidingen zijn in meerdere opzichten van belang, zoals voor het verschaffen van noodzakelijke kwalitatieve inzichten, voor het ontwikkelen van scenario's en voor kwantitatieve (rekenkundige) validaties, ook wanneer uiteindelijk, zoals hieronder, met computersimulatie gewerkt gaat worden. Een uitvoeriger bespreking van dit belang is o.a. te lezen in [3].

Aan deze en nagenoeg alle in de wachttijdtheorie bekende formules liggen echter een aantal aannamen ten grondslag. In de eerste plaats de zogenaamde aanname van 'steady-state', alsof het onderliggende wachtrijproces over lange tijd uitgemiddeld mag worden opgevat. Lijkt een dergelijke aanname gerechtvaardigd voor bijvoorbeeld de analyse van call centers, voor een check-in balie is dit niet het geval omdat men te maken heeft met een beperkt openingsinterval (bijvoorbeeld 3 uur) met sterk wisselende drukte. Een tweede voor de meeste wachttijdformules impliciet veronderstelde aanname betreft die van zogenaamde exponentiële (at random) aankomsten en exponentiële bedieningstijden(verdeling). Deze blijken eveneens verre van realistisch voor een check-in proces. Zonder deze exponentiële aanname zijn echter geen exacte (maar wel diverse benaderende) formules bekend voor de wachttijd-verdeling, oftewel wachttijdpercentages. Juist dergelijke percentages spelen een belangrijke rol als mogelijke norm voor het check-in proces op Schiphol, zoals een wachttijd van minder dan 10 minuten voor minstens 90% van alle reizigers.

## Computersimulatie

De techniek van computersimulatie is derhalve vereist. Met deze techniek kan men in enkele seconden tot hooguit minuten de realiteit van een al dan niet bestaande situatie gedurende enkele uren tot weken zo niet jaren, met behulp van de computer nabootsen en evalueren. In figuur 2 is een visualisatie (ook wel animatie) van een simulatiemodel voor check-in balies te zien.

### *Hoe werkt het*

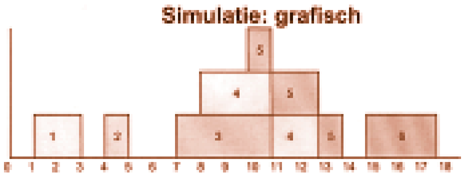
Het principe van simulatie is eenvoudig uit te leggen met een getalvoorbeeld waarin we een enkele check-in balie simuleren. Laten we allereerst als uitgangspunt

## Wachtmodel



| Klant | Tussentijd | Aankomst | Bedieningsduur |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 |
| 3 | 3 | 7 | 4 |
| 4 | 1 | 8 | 2 |
| 5 | 2 | 10 | 1 |
| 6 | 5 | 15 | 3 |

## Simulatie: grafisch




## Simulatie: rekenkundig (tabel)

| t | G | NA | NB | NL | TV | MG | TG | EG |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | initialisatie | 0 | 0 | 0 | 0 | A | 0 + 1 | (A, 1) |
| 1 | A | 1 | 0 | 1 | 0 | A<br>B | 1 + 3<br>1 + 2 | (B, 3) |
| 3 | B | 1 | 1 | 0 | 2 | A | 4 | (A, 4) |
| 4 | A | 2 | 1 | 1 | 2 | A<br>B | 4 + 3<br>4 + 1 | (B, 5) |
| 5 | B | 2 | 2 | 0 | 3 | A | 7 | (A, 7) |
| 7 | A | 3 | 2 | 1 | 3 | A<br>B | 7 + 1<br>7 + 4 | (A, 8) |
| 8 | A | 4 | 2 | 2 | 4 | A<br>B | 8 + 2<br>11 | (A, 10) |
| 10 | A | 5 | 2 | 3 | 8 | A<br>B | 10 + 5<br>11 | (B, 11) |
| 11 | B | 5 | 3 | 2 | 11 | A<br>B | 15<br>11 + 2 | (B, 13) |
| 13 | B | 5 | 4 | 1 | 15 | A<br>B | 15<br>13 + 1 | (B, 14) |
| 14 | B | 5 | 5 | 0 | 16 | A | 15 | (A, 15) |
| 15 | A | 6 | 5 | 1 | 16 | B | 15 + 3 | (B, 18) |
| 18 | B | 6 | 6 | 0 | 19 | | | |

t : Simulatieklok
G : Gebeurtenis op dit moment
NA : Aantal gearriveerd
NB : Aantal voltooide bedieningen
NL : Aantal aanwezig
TV : Totale verblijftijd tot dit moment
MG : Mogelijke eerstvolgende gebeurtenis
TG : Tijdstip van die mogelijke gebeurtenis
EG : Eerstvolgende gebeurtenis met tijdstip

**FIGUUR 3**

nemen dat we precies weten wanneer de achtereenvolgende passagiers aankomen bij de balie, en hoeveel tijd het voor elk van hen kost om in te checken (zie figuur 3, Wachtmodel). Met deze gegevens kunnen we dan vervolgens bijhouden hoeveel klanten er op elk moment aanwezig zijn, zoals grafisch weergegeven in figuur 3, Simulatie: grafisch). Op basis van deze grafiek zou men dan vrij direct het gemiddeld aantal klanten in het systeem kunnen bepalen. (Ga zelf na hoe.)

Maar ook zonder grafiek is dat mogelijk door bij elke relevante gebeurtenis, d.w.z. een aankomst (A) of een voltooide bediening (B), bij te houden hoeveel klanten er nog zijn (zie figuur 3, tabel bij Simulatie: rekenkundig). Vervolgens is na te gaan welke van de volgende mogelijke gebeurtenissen het eerste zal optreden en wanneer. De klok wordt doorgedraaid (vooruitgezet) naar die volgende gebeurtenis. Deze stappen kunnen dan worden herhaald.

In dit voorbeeld wordt na een initialisatiestap gekeken naar de eerste aankomst (op tijdstip $t = 1$). Op dat tijdstip worden de tellers *NA* en *NL* verhoogd. Nu zijn er twee mogelijke volgende gebeurtenissen: een nieuwe aankomst op tijdstip 4 of de voltooiing van een bediening op tijdstip 3. De eerstvolgende wordt B, dus de klok wordt doorgedraaid naar $t = 3$ en de tellers *NA* en *NL* worden aangepast. Ook wordt telkens de totale verblijftijd verhoogd indien in de verstreken tijdsduur klanten aanwezig waren.

Bijvoorbeeld: tussen $t = 8$ en $t = 10$ waren er 2 klanten aanwezig en werd de teller *TV* met waarde $2 \times 2 = 4$ verhoogd.

Na enige tijd wordt dit proces gestopt en evalueert men de resultaten. Zo blijkt uit de tabel direct dat de eerste 6 klanten een totale tijd van 19 minuten in het systeem hebben doorgebracht, dus een gemiddelde verblijftijd van 3,17 minuut per klant.

### *Samenvattend*

Hiermee is in principe de werking van simulatie geïllustreerd, te weten:

- alleen tijdstippen waarop relevante gebeurtenissen plaatsvinden worden uitgelicht;
- de tijd tussen opeenvolgende gebeurtenissen wordt als het ware overgeslagen;
- de gevolgen van de gebeurtenissen worden bijgehouden met tellers.

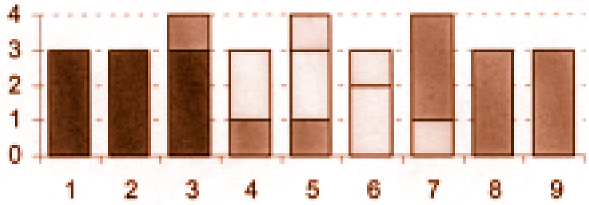
Door deze stappen te automatiseren kunnen in luttele seconden duizenden tot miljoenen klanten worden gesimuleerd om aanzienlijk representatievere resultaten te verkrijgen. Diverse prestatiematen, zoals wachttijden, bezettingsgraden en rijlengten, kunnen zo worden geëvalueerd.

### *Onzekerheden*

Nog niet genoemd maar zeker ook realistisch zijn de onzekerheden in tussenaankomsttijden en bedieningsduren. Door deze te loten, vergelijkbaar met het gooien van een dobbelsteen of het draaien aan een roulettewiel, kunnen ook dergelijke realistische onzekerheden en fluctuaties worden nagebootst. Uiteindelijk volgen hieruit betrouwbaarheidsintervallen voor de resultaten.

Stel dat de tussenaankomsttijden 1, 2, 3, 4, 5 of 6 minuten kunnen bedragen, elk voorkomend met dezelfde waarschijnlijkheid. Dan kan het aankomstproces nagebootst worden door het werpen van een dobbelsteen. De waarden gegeven in het bovenstaande wachtmodel zouden de eerste zes realisaties kunnen zijn. Stel dat de bedieningsduren 1, 2, 3, 4 of 5 minuten kunnen bedragen en de kans op deze waarden respectievelijk 0,2, 0,4, 0,2, 0,1 en 0,1. Dan kan het aankomstproces nagebootst worden door het draaien aan een roulettewiel met daarin 10 vakjes die genummerd zijn: 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5. Zo zouden

| Vlucht | Check-in perioden | Aantal balies nodig |
|---|---|---|
| 1 | {1, 2, 3} | 3 |
| 2 | {3, 4, 5} | 1 |
| 3 | {4, 5, 6} | 2 |
| 4 | {5, 6, 7} | 1 |
| 5 | {7, 8, 9} | 3 |




**FIGUUR 4 Baliebehoefte voor 5 vluchten en totale baliebehoefte voor 9 perioden**

de waarden in het voorbeeld de eerste zes realisaties kunnen zijn. Verder kijkend naar dit voorbeeld is de gemiddelde tussenaankomsttijd $3\frac{1}{2}$ minuut en de gemiddelde bedieningsduur $2\frac{1}{2}$ minuut, ofwel de bezettingsgraad $\rho = \frac{5}{7}$. Op basis van wachttijdtheorie (zie formule (1) in 'Wachten op één bediende') zal de gemiddelde verblijftijd over lange tijd en dus een groot aantal klanten bezien,

$$V = \frac{1}{\frac{2}{7}} = 3{,}5$$

moeten bedragen (vergelijk met 3,17 uit de simulatie).

### *Mogelijkheden en gevaren*

Door de bijna onuitputtelijke mogelijkheden van computers voor het bijhouden van tellers en het opslaan van gegevens en resultaten, is dit eenvoudige principe van zogeheten '*discrete event* simulatie' in zijn eenvoud toepasbaar op nagenoeg elke mogelijke logistieke situatie, hoe complex ook: een volledig fabricage-, bagage- of ziekenhuisproces of het NS-netwerk.
Dit wordt nog extra vergemakkelijkt door de hedendaagse beschikbaarheid van speciaal daartoe uitgeruste professionele simulatiesoftware.
Tegelijkertijd schuilt hierin het gevaar van door de bomen het bos niet meer zien en vooral van het ontbreken van onderliggende inzichten, het omgaan en interpreteren van kansen en betrouwbaarheden en getalsmatige onderbouwing (validatie). Het is juist daarom dat de wiskundige modellen, inzichten en formules vanuit de wachttijdtheorie en kansrekening van groot belang zijn en zullen blijven (zie ook [3]).

## Wiskundige modellering

Terug naar het check-in probleem. Met simulatie wordt slechts een eerste (zij het essentiële) stap gezet: het berekenen van wachttijden bij gegeven aantal balies en openingstijden voor één enkele vlucht. Een tweede stap, die eveneens met simulatie gemakkelijk kan worden uitgevoerd, behelst het gestructureerd bepalen van het minimaal aantal benodigde balies om aan een bepaalde wachttijdnorm te voldoen, zoals een wacht-tijd van minder dan 10 minuten voor minstens 90% van alle reizigers. Het minimaliseren vindt puur plaats met enkele instellingswaarden voor het aantal balies totdat de norm wordt overschreden. Dit moet voor elke vlucht afzonderlijk worden bepaald. Op deze wijze kan uiteindelijk een behoefteschema worden opgesteld voor alle vluchten, zoals in het fictieve voorbeeld voor vijf vluchten in figuur 4.
Hierbij is nog aangenomen dat het aantal balies voor een vlucht constant moet blijven gedurende elk uur van zijn check-in perioden, dus bijvoorbeeld 3 balies voor vlucht 1 gedurende de eerste 3 perioden.

### *Planning*

Welke balies moeten nu voor welke vlucht worden opengesteld, is nu een volgende concrete vraagstelling waarvoor Schiphol zich geplaatst ziet. Daarbij dient tevens rekening gehouden te worden met randvoorwaarden zoals de natuurlijke eis dat balies voor één en dezelfde vlucht naast elkaar dienen te liggen. Kan dit altijd en, zo ja, hoe vindt men een oplossing. Is er überhaupt wel een oplossing met niet meer dan het maximaal aantal benodigde balies in enige periode (in bovenstaand voorbeeld dus 4)?
Zo blijkt voor bovenstaand voorbeeld een voor de hand liggende indeling van de balies tot een conflict te leiden (bij vlucht 5) als men balies simpelweg aan de eerstvolgende vrije balie zou toekennen (zie figuur 5).
Met een omzetting van de vluchten 3, 4 en 5 is dit (in dit voorbeeld) echter eenvoudig op te lossen. Maar kan dit altijd, en hoe vindt men dit (snel) bij een daad-werkelijke complexiteit van Schiphol met in de orde

**Niet-toegelaten schema**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | 2 | 2 | 2 | | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | | 4 | 4 | 4 | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| b/t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**Toegelaten schema**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | 2 | 2 | 2 | | 5 | 5 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | 4 | 4 | 4 | | |
| b/t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

**FIGUUR 5 Schema's voor 5 vluchten; het toegelaten schema is optimaal.**

van 600 vluchten per dag, verdeeld over verschillende 'baaien', elk met tot 24 check-in balies, 12 aan weerszijden?

### *LP-formulering*

We staan dus voor het probleem om met zo weinig mogelijk balies vluchten toe te wijzen aan balies, zodanig dat:
(a) balies voor dezelfde vlucht naast elkaar liggen;
(b) niet meer dan het aantal beschikbare balies wordt gebruikt;
(c) een balie niet wordt toegewezen aan twee vluchten die tegelijkertijd inchecken.
Hiertoe zal een wiskundige formulering worden gegeven. Daarbij is het handig op te merken dat door het vaststellen van het laagste balienummer voor een vlucht de toewijzing bij de balies volledig vast ligt voor alle check-in perioden. In bovenstaande schema's is vlucht 1 bijvoorbeeld toegewezen aan balie 1. Gegeven de baliebehoefte en de check-in perioden zijn hiermee balies 1, 2 en 3 bezet gedurende de eerste 3 perioden.

Een wiskundige formulering van dit probleem leidt tot onderstaand lineair programmeringsmodel, waarbij $D$ geminimaliseerd moet worden. Dit kan met standaard LP-software in enkele minuten worden opgelost voor de complexiteit van tientallen vluchten.

minimaliseer $D$
onder de voorwaarden

$$\left.\begin{array}{l} d_f \geq 1 \\ d_f + n_f - 1 \leq D \end{array}\right\} \forall f \qquad \begin{array}{r}(1)\\(2)\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} d_g + n_g \leq d_f + M\, y_{fg} \\ d_f + n_f \leq d_g + M\,(1 - y_{fg}) \end{array}\right\} \forall f, g \text{ met } I_f \cap I_g \neq \varnothing \qquad \begin{array}{r}(3)\\(4)\end{array}$$

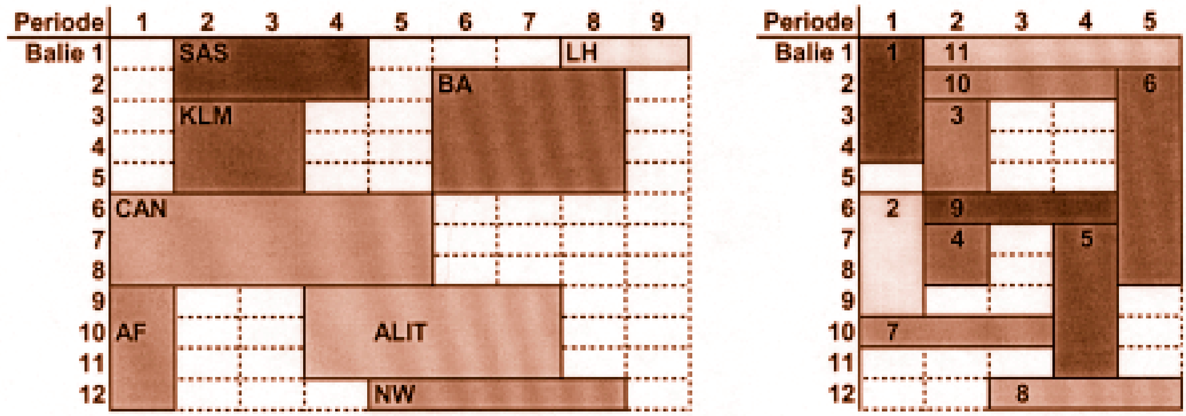
De beslissingsvariabelen van dit model zijn:
$D$ : voor het totaal aantal benodigde balies (genummerd van 1 tot en met $D$),
$d_f$: voor het laagste balienummer toegewezen aan vlucht $f$

$$y_{fg} = \begin{cases} 1 & \text{als vlucht } f \text{ aan lagere balies zit dan vlucht } g \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

De gegevens van de vluchten worden gerepresenteerd door:
$I_f$: de check-in perioden (interval) voor vlucht $f$ (met $f = 1, \ldots, F$);
$n_f$: het aantal benodigde balies voor het inchecken van vlucht $f$;
$M$ : het maximaal aantal fysiek beschikbare balies.

Door gebruik te maken van de variabele $d_f$ is per definitie voldaan aan voorwaarde (a), balies voor dezelfde vlucht moeten naast elkaar liggen. De voorwaarden waaraan de oplossing verder moet voldoen zijn (b) dat voor elke vlucht het laagste balienummer $d_f$ (en daarmee ook het hoogste balienummer $d_f + n_f - 1$) binnen de $D$ beschikbare balies valt, en (c) dat elk tweetal vluchten dat tegelijkertijd balies nodig heeft ($I_f \cap I_g \neq \varnothing$) niet dezelfde balies krijgt toegewezen (overlap). Voor de laatste is de hulpvariable $y_{fg}$ nodig. Als bijvoorbeeld vlucht 1 lagere balies krijgt toegewezen dan 2, ofwel $y_{12} = 1$ en $y_{21} = 0$, dan wordt voorwaarde (4) bindend ($d_1 + 3 \leq d_2$) en voorwaarde (3) een loze voorwaarde ($d_2 + 1 \leq d_1 + M$).

Als voorbeeld zijn in het bovenstaand plannings-probleem met 5 vluchten:
$d_1 = 1,\ d_2 = 4,\ d_3 = 1,\ d_4 = 3$ en $d_5 = 1$
voor de niet-toegelaten oplossing, en
$d_1 = 1,\ d_2 = 4,\ d_3 = 2,\ d_4 = 1$ en $d_5 = 2$
voor de toegelaten oplossing.




FIGUUR 6

Dat de eerste oplossing in het LP-model niet toegelaten is, kan men als volgt inzien. Vlucht 5 is aan lagere balies toegewezen dan vlucht 4 ($d_5 < d_4$ en dus $y_{54} = 1$). Deze oplossing voldoet echter niet aan voorwaarde (4): $d_5 + 3 \leq d_4$ (de vluchten overlappen).
Voor verdere analyse is het nuttig om voor elke periode naar de totale behoefte aan balies te kijken. De totale behoefte in periode $t$ wordt aangeduid met $N_t$ en kan eenvoudig berekend worden met

$$N_t = \sum_{\{f|t \in I_f\}} n_f$$

De totale behoefte in de drukste periode (de periode met de grootste totale behoefte) wordt aangeduid met $N_{max}$. Om alle vluchten in deze periode te kunnen laten inchecken zal zeker moeten gelden dat $D \geq \max_{\{t\}} N_t = N_{max}$. Veelal is dit aantal ook voldoende. Verdere details van zowel deze en alternatieve formuleringen als software worden uit oogpunt van ruimte hier achterwege gelaten. Zie hiervoor [2].

## Opgaven

Voor de problemen in figuur 6 is een planning mogelijk waarbij het beschikbare aantal balies precies gelijk is aan het aantal benodigde balies in de drukste periode, $N_{max} = 8$ voor het eerste probleem en $N_{max} = 9$ voor het tweede probleem. Vindt deze toewijzingen.
Soms zijn echter meer dan $N_{max}$ balies nodig om alle vluchten in te kunnen plannen. Construeer een voorbeeld waarbij dit het geval is. Een dergelijk voorbeeld kan getest worden door toezending aan *H.J.vanderSluis@uva.nl.*
Oplossingen zijn te vinden op *www.fee.uva.nl/ormsite/.*

## Afsluitend

Andere toepassingen van deze gecombineerde vorm van wiskundige modellering en simulatie voor de bijenkorf Schiphol betreffen bijvoorbeeld:
- de bagageafhandeling,
- het plannen van maaltijden,
- het bepalen van vluchtroutes met minimaal brandstofgebruik,
- de paspoortcontrole en veiligheid (securities), en
- het plannen van vluchten aan de verschillende gates.

Kortom, het gaat hier om een vorm van klassieke en eigentijdse praktische wiskunde.
Een nadere kennismaking is mogelijk op onze themadag voor docenten in oktober 2004.

*Literatuur*

*[1] N.M. van Dijk: Altijd in de verkeerde rij. In: Natuur en Techniek (12 december 1996, p. 10-21).*
*[2] A. Al-Ibrahim, C. Duin, E. van der Sluis: Adjacent Resource Scheduling. Working Paper, Universiteit van Amsterdam (2003).*
*[3] N.M. van Dijk, E. van der Sluis: Check-in computation and optimization by simulation and IP in combination. Working Paper, Universiteit van Amsterdam (2003).*

*Over de auteurs*

*Prof. dr. Nico M. van Dijk (e-mailadres: N.M.vanDijk@uva.nl) studeerde wiskunde aan de Universiteit van Leiden en is verantwoordelijk voor de opleiding Operationele Research & Management aan de Universiteit van Amsterdam.*
*Dr. Erik van der Sluis (e-mailadres: H.J.vanderSluis@uva.nl) studeerde econometrie aan de Universiteit van Amsterdam en geeft in zijn functie als universitair docent colleges op het gebied van Operationele Research en Simulatie aan de Universiteit van Amsterdam.*

**1430.** De lijnen $l$ en $m$ snijden elkaar loodrecht in A; voorts zijn gegeven het getal $k$ en het van A verschillende punt B op $l$.

***a.*** Bepaal de verzameling van het punt P, dat zich op $l$ in Q projecteert zo, dat $PB^2 = k . AB . AQ$ is.

***b.*** Voor welke waarden van $k$ is de onder ***a*** bedoelde verzameling leeg?

**1431.** Van de regelmatige vierzijdige piramide T–ABCD zijn alle ribben $a$; E is het snijpunt van AC en BD; F is het midden van AD en G is het midden van BT.

***a.*** Druk de afstand van de lijnen CG en DT uit in $a$.

***b.*** Bereken de hoek, die BC met het vlak ACG maakt.

***c.*** Druk de straal van de bol, die door A, E, F en G gaat, uit in $a$.

**1432.** Van een scheef driezijdig prisma is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijde $2a$. De mantelribben AD, BE en CF zijn $a\sqrt{3}$. M is het midden van DE. De projectie van M op het grondvlak valt samen met het zwaartepunt Z van de driehoek ABC.

***a.*** Bewijs, dat het vlak ABF deelvlak is van de tweevlakshoek, gevormd door het grondvlak ABC en het mantelvlak ABED.

***b.*** Druk de inhoud van het viervlak ABFM uit in $a$.

***c.*** Een (rechte cirkel-)kegel met top M en as MZ raakt het vlak ABED. Bewijs, dat de doorsnede van het prisma met een door C gaand raakvlak van deze kegel een rechthoekig trapezium is.

**1433.** ***a.*** Van de kubus ABCD–EFGH is de ribbe $a$; S is het snijpunt van BG en CF. Construeer in een stereometrische figuur van de kubus (waarbij ABFE wordt voorgesteld door een vierkant met zijde $a = 8$ cm) de lijnen door S, die loodrecht op CE staan en die AD op een afstand $\frac{1}{2}a$ kruisen.

***b.*** In de kubus ABCD–EFGH is K een willekeurig punt van het lijnstuk AH; P is de projectie van F op CK. Bepaal de verzameling van de punten P, als K het lijnstuk AH doorloopt.

**1434.** Bewijs, dat in elke driehoek geldt:

$$\sin\beta \sin\gamma + \sin\gamma \sin\alpha + \sin\alpha \sin\beta \leqq (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2$$

en vind een meetkundige betekenis voor deze ongelijkheid.

*Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang 51 (1963-1964)*

*De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).*

# FOUTEN IN DE ELO-RANGLIJST

## Schakers werken al jaren met een ranglijst gebaseerd op de normale verdeling. Helaas, er zitten fouten in die lijst!

[ Hans van Maanen ]

### De Elo-ranglijst

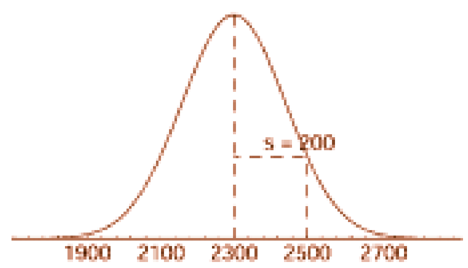
Veruit de bekendste ranglijst in de sport is de ranglijst voor schakers, de Elo-ranglijst. De lijst, in 1960 officieel ingevoerd in de Verenigde Staten en in 1970 door de wereldschaakfederatie FIDE, werd bedacht door de in Hongarije geboren Amerikaanse natuurkundige Arpad Elo (1903–1992).

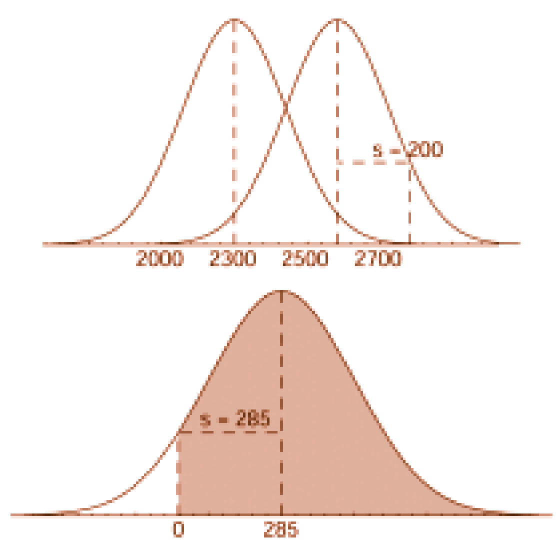
In de ranglijst wordt de relatieve kracht van alle schakers bijgehouden volgens een systeem gebaseerd op de normale verdeling. Bobby Fischer, volgens velen de beste schaker aller tijden, had, toen hij in 1972 met schaken stopte, een Elo-score van 2780. De laagste score voor beroepsschakers ligt op 1800 punten – lager wordt niet bijgehouden door de FIDE. Ook bij andere vormen van sport en spel, zoals badminton, backgammon en petanque wordt het systeem gehanteerd.

Voordat Elo zijn voorstel indiende, waren er natuurlijk al andere ranglijsten ontworpen. Gebruikt werden het Ingo-systeem, in 1948 ontwikkeld door de in Ingolstadt wonende Anton Hoesslinger en het systeem van Kenneth Harkness, die in 1950 een lijst met de Amerikaanse schakers was gaan bijhouden. Daarnaast waren er de FIDE-titels – iemand die van meester tot grootmeester wilde promoveren, moest consistent driekwart van de wedstrijden in grote toernooien winnen. Zo was al de traditie ontstaan dat een beginnende beroepsschaker op 2000 punten begint, een gemiddelde kandidaatmeester op 2300 punten staat en een gemiddelde grootmeester op 2500. De klasse-indeling van beginnende schaker via meester tot grootmeester gaat steeds met 200 punten omhoog.

Toen het systeem van Harkness eind jaren vijftig aan kritiek kwam bloot te staan – de sterke schakers gingen na invoering van de lijst wel erg snel omlaag en het aanstormend talent omhoog – diende Arpad Elo zijn nieuwe voorstel in. Hij interpreteerde de klasse-indeling statistisch[1]. Schakers, zei hij, schaken niet altijd even goed, en hun prestaties zullen 'normaal verdeeld' zijn. De 200 punten van de klasse-indeling is eigenlijk niet anders dan de standaardafwijking van hun prestaties (zie figuur 1). Een kandidaatmeester

**FIGUUR 1** Een schaker van 2300 punten is volgens Elo in 68 procent van de partijen tussen de 2100 en 2500 punten waard.




**FIGUUR 2** Als twee schakers met een Elo-verschil van 285 punten honderd partijen spelen, moet de uitslag 84–16 worden.

**TABEL 1** De Elo-tabel

| Verschil | Score |
|---|---|
| 0 – 3 | 50 – 50 |
| 4 – 10 | 51 – 49 |
| 11 – 17 | 52 – 48 |
| 18 – 25 | 53 – 47 |
| 26 – 32 | 54 – 46 |
| 33 – 39 | 55 – 45 |
| 40 – 46 | 56 – 44 |
| 47 – 53 | 57 – 43 |
| 54 – 61 | 58 – 42 |
| 62 – 68 | 59 – 41 |
| 69 – 76 | 60 – 40 |
| 77 – 83 | 61 – 39 |
| 84 – 91 | 62 – 38 |
| 92 – 98 | 63 – 37 |
| 99 – 106 | 64 – 36 |
| 107 – 113 | 65 – 35 |
| 114 – 121 | 66 – 34 |
| 122 – 129 | 67 – 33 |
| 130 – 137 | 68 – 32 |
| 138 – 145 | 69 – 31 |
| 146 – 153 | 70 – 30 |
| 154 – 162 | 71 – 29 |
| 163 – 170 | 72 – 28 |
| 171 – 179 | 73 – 27 |
| 180 – 188 | 74 – 26 |
| 189 – 197 | 75 – 25 |
| 198 – 206 | 76 – 24 |
| 207 – 215 | 77 – 23 |
| 216 – 225 | 78 – 22 |
| 226 – 235 | 79 – 21 |
| 236 – 245 | 80 – 20 |
| 246 – 256 | 81 – 19 |
| 257 – 267 | 82 – 18 |
| 268 – 278 | 83 – 17 |
| 279 – 290 | 84 – 16 |
| 291 – 302 | 85 – 15 |
| 303 – 315 | 86 – 14 |
| 316 – 328 | 87 – 13 |
| 329 – 344 | 88 – 12 |
| 345 – 357 | 89 – 11 |
| 358 – 374 | 90 – 10 |
| 375 – 391 | 91 – 9 |
| 392 – 411 | 92 – 8 |
| 412 – 432 | 93 – 7 |
| 433 – 456 | 94 – 6 |
| 457 – 484 | 95 – 5 |
| 485 – 517 | 96 – 4 |
| 518 – 559 | 97 – 3 |
| 560 – 619 | 98 – 2 |
| 620 – 735 | 99 – 1 |
| 735 en meer | 100 – 0 |

van 2300 punten is in 68 procent van zijn partijen tussen de 2100 en 2500 waard, en als hij een stuk of twintig partijen tegen de wereldkampioen speelt, zal hij er misschien eentje winnen (een kandidaatmeester zit ongeveer 500 Elo-punten, dus ruim twee standaardafwijkingen, van de wereldkampioen, maar die heeft natuurlijk ook zijn normaal verdeelde sterke en zwakke partijen). Elo koos zijn standaardafwijking van 200 punten op historische gronden – in werkelijkheid zijn de prestaties van topschakers veel voorspelbaarder: hun standaardafwijking zit eerder rond de 13 punten.
Om de zaak niet te ingewikkeld te maken, nam Elo verder aan dat iedere schaker een even grote spreiding in de prestaties heeft. Ook dat is niet correct, maar het is voor de verdere berekeningen niet zo belangrijk.
Als twee normaal verdeelde variabelen $x$ en $y$ worden opgeteld (of afgetrokken), zal volgens de wetten van de statistiek de uitkomst een normale verdeling vormen rond $x + y$ (of $x - y$) met een standaardafwijking gelijk aan de wortel uit de som van de kwadraten van de oorspronkelijke standaardafwijkingen: $s = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$
De standaardafwijking van het resultaat van een schaakpartij komt evenzo uit op $\sqrt{200^2 + 200^2} \approx$ 282,84 punten.
Stel nu dat twee schakers tegen elkaar spelen; de eerste schaker heeft 2300 Elo-punten, de andere 2585. Omdat winstkansen normaal verdeeld zijn met een standaardafwijking van 285 punten, is te voorspellen hoe de uitslag zal worden. De tweede schaker is 285 punten beter dan de eerste, dat is juist één standaardafwijking. Hij wint derhalve $50 + 34 = 84$ procent van de partijen, de zwakkere speler wint 16 procent. Een wedstrijd van tien partijen moet eindigen in 8,5 – 1,5 (zie figuur 2).
Als deze verwachting niet uitkomt en de wedstrijd bijvoorbeeld eindigt in 8 – 2, is de sterkste speler kennelijk te hoog ingeschaald en de zwakste te laag. De sterke speler moet het verschil in Elo-punten inleveren – vermenigvuldigd met een bepaalde factor $k$ om de scores met de gewenste snelheid te laten schuiven (de factor is betrekkelijk willekeurig gekozen; voor de beste schakers geldt $k = 10$, voor schakers met minder dan 2400 Elo-punten is $k = 15$ en nieuwelingen starten met $k = 25$).
De meevallende schaker krijgt de Elo-punten van de tegenvallende erbij. In het voorbeeld speelt de beste schaker 0,5 wedstrijdpunten onder zijn niveau, dus hij levert $10 \times 0{,}5 = 5$ Elo-punten in, en die gaan naar zijn tegenstander. Gevolg is dat de betere schaker afzakt tot 2580 en de mindere stijgt naar 2305. Hun krachtsverschil is nu nog maar 275 Elo-punten.
Voor elk verschil in Elo-punten is op soortgelijke wijze af te leiden wat de verwachte uitslag zal worden, en op grond daarvan worden straffen en beloningen in Elo-punten uitgedeeld. Zou het krachtsverschil bijvoorbeeld 100 Elo-punten zijn, dus $\frac{100}{282{,}84} = 0{,}35$ standaardafwijking, dan moet de sterkste speler winnen met 6,5–3,5.
Elo vatte een en ander samen in een handzame tabel ([1, p. 31], hier gereproduceerd als tabel 1), die niet

anders is dan een bewerking van een tabel van de normale verdeling.
Op toernooien waaraan meer schakers meedoen is de berekening wat ingewikkelder, maar het principe is gelijk. De Elo-score van elke speler wordt vergeleken met het gemiddelde van alle deelnemers (of, afhankelijk van het soort toernooi, met dat van al zijn tegenstanders), en op grond daarvan wordt een verwachting van de toernooiuitslag gemaakt. Aan de hand van een aantal eenvoudige formules worden de *ratings* vervolgens bijgesteld en eens in de zoveel tijd door de FIDE gepubliceerd.

## De fouten

Het Elo-puntenstelsel is, bij nader inzien, natuurlijk slechts een zeer grove maat voor de kwaliteit van de spelers. Iemand die altijd remises speelt, wordt precies zo beoordeeld als iemand die roekeloos speelt en daarmee even vaak wint als verliest.
Verder is met het voordeel van de eerste zet geen rekening gehouden. Als twee even sterke spelers tegen elkaar schaken, heeft wit een extra winstkans van 57 tegen 43 procent – een Elo-voordeel van rond de 50 punten [1, p. 159]. Hoe sterker de spelers, hoe groter het voordeel.
Zo zijn er wel meer fundamentele bezwaren tegen de opzet van Elo te maken [2, 3], maar de vraag die wij nu beantwoord willen zien, is of hij zijn tabel goed heeft opgesteld gegeven zijn vooronderstellingen.
Hoezeer Elo gelijk had met zijn uitspraak dat tabellen al snel heilig zijn, blijkt wel uit het feit dat sinds 1960 kennelijk niemand de moeite lijkt te hebben genomen een en ander goed na te rekenen. Terwijl de kwestie zeker niet louter academisch is: beroepsschakers betalen of ontvangen startgelden voor toernooien op grond van hun Elo-punten.
Het is vreemd, maar Elo heeft de drie klassieke fouten van een wiskundeopgave weten te maken: een schrijffout, een rekenfout, en een denkfout.

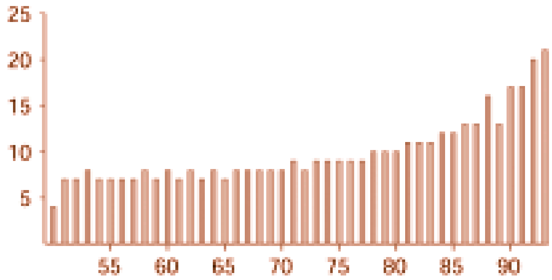
### *Een schrijffout*

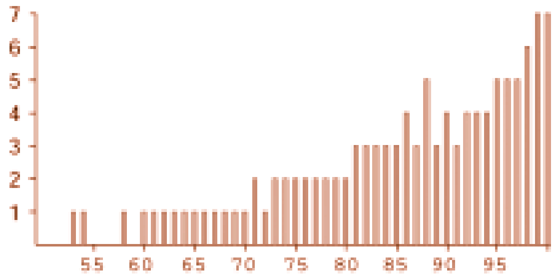
Zelfs voordat we gaan rekenen, kunnen we Elo al op een fout betrappen. Het zal duidelijk zijn dat de ‘klassenbreedten’ door het gebruik van de normale verdeling steeds groter worden. Van 4 naar 10 is 7 punten, van 207 naar 215 is 9 punten, en zo loopt het langzaam op. Maar als we Elo’s klassenbreedten in een grafiek uitzetten (zie figuur 3), zien we een merkwaardige ‘hik’ bij $p = 88$ procent. Daar blijkt de winstverwachting te lopen van 329 t/m 344, dus 16 Elo-punten, terwijl de verwachtingen ervoor en erna elk 13 punten beslaan. Misschien had de klasse moeten lopen van 328 tot 342, dan was de toename van de klassenbreedte in ieder geval wat regelmatiger geweest. Het kan haast niet anders of Elo heeft zich hier vergist en een schrijffout gemaakt.

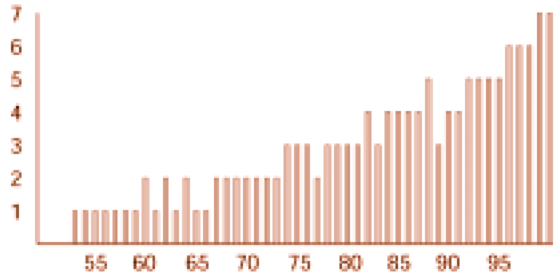
### *Een systematische fout*

Voor we aan het werk gaan om die schrijffout te herstellen, kijken we natuurlijk eerst even naar de rest van de fouten. Hoe berekende Elo zijn tabel? Hij nam

**FIGUUR 3** De klassenbreedte per winstverwachting in de Elo-tabel. Duidelijk is de schrijffout bij $p = 0,88$. Omwille van de overzichtelijkheid is de grafiek bij $p = 0,93$ afgekapt.




**FIGUUR 4** De discrepantie tussen de normale verdeling en die van Elo wordt steeds groter.
**FIGUUR 5** Oplopende discrepantie tussen de Elo en Elo+

**TABEL 2 Een verbeterde Elo-tabel**

| Elo | Score | Elo+ |
|---|---|---|
| 0 – 3 | 50 – 50 | 0 – 3 |
| 4 – 10 | 51 – 49 | 4 – 10 |
| 11 – 17 | 52 – 48 | 11 – 17 |
| 18 – 25 | 53 – 47 | 18 – 24 |
| 26 – 32 | 54 – 46 | 25 – 31 |
| 33 – 39 | 55 – 45 | 32 – 38 |
| 40 – 46 | 56 – 44 | 39 – 45 |
| 47 – 53 | 57 – 43 | 46 – 52 |
| 54 – 61 | 58 – 42 | 53 – 60 |
| 62 – 68 | 59 – 41 | 61 – 67 |
| 69 – 76 | 60 – 40 | 68 – 74 |
| 77 – 83 | 61 – 39 | 75 – 82 |
| 84 – 91 | 62 – 38 | 83 – 89 |
| 92 – 98 | 63 – 37 | 90 – 97 |
| 99 – 106 | 64 – 36 | 98 – 104 |
| 107 – 113 | 65 – 35 | 105 – 112 |
| 114 – 121 | 66 – 34 | 113 – 120 |
| 122 – 129 | 67 – 33 | 121 – 127 |
| 130 – 137 | 68 – 32 | 128 – 135 |
| 138 – 145 | 69 – 31 | 136 – 143 |
| 146 – 153 | 70 – 30 | 144 – 151 |
| 154 – 162 | 71 – 29 | 152 – 160 |
| 163 – 170 | 72 – 28 | 161 – 168 |
| 171 – 179 | 73 – 27 | 169 – 177 |
| 180 – 188 | 74 – 26 | 178 – 185 |
| 189 – 197 | 75 – 25 | 186 – 194 |
| 198 – 206 | 76 – 24 | 195 – 203 |
| 207 – 215 | 77 – 23 | 204 – 213 |
| 216 – 225 | 78 – 22 | 214 – 222 |
| 226 – 235 | 79 – 21 | 223 – 232 |
| 236 – 245 | 80 – 20 | 233 – 242 |
| 246 – 256 | 81 – 19 | 243 – 253 |
| 257 – 267 | 82 – 18 | 254 – 263 |
| 268 – 278 | 83 – 17 | 264 – 275 |
| 279 – 290 | 84 – 16 | 276 – 286 |
| 291 – 302 | 85 – 15 | 287 – 298 |
| 303 – 315 | 86 – 14 | 299 – 311 |
| 316 – 328 | 87 – 13 | 312 – 324 |
| 329 – 344 | 88 – 12 | 325 – 339 |
| 345 – 357 | 89 – 11 | 340 – 354 |
| 358 – 374 | 90 – 10 | 355 – 370 |
| 375 – 391 | 91 – 9 | 371 – 387 |
| 392 – 411 | 92 – 8 | 388 – 406 |
| 412 – 432 | 93 – 7 | 407 – 427 |
| 433 – 456 | 94 – 6 | 428 – 451 |
| 457 – 484 | 95 – 5 | 452 – 479 |
| 485 – 517 | 96 – 4 | 480 – 511 |
| 518 – 559 | 97 – 3 | 512 – 553 |
| 560 – 619 | 98 – 2 | 554 – 613 |
| 620 – 735 | 99 – 1 | 614 – 728 |
| 736 en meer | 100 – 0 | 729 en meer |

een Elo-verschil, en zocht daar de te verwachten score bij. Hij gaf ook een voorbeeld: een verschil van 160 punten komt overeen met  standaardafwijkingen, en volgens de tabel met de normale verdeling betekent dat een winstkans van 0,714, afgerond 71 procent [1, p. 159].

Het vreemde is echter, dat de tabel voor de normale verdeling die Elo hanteerde kennelijk niet deugde. Zo geeft een verschil van 169 punten een winstkans van 72,492, afgerond 72, en van 170 punten een winstkans van 72,609, afgerond 73. De overgang van 72 naar 73 procent zou dus bij 169 naar 170 moeten liggen, maar Elo legt de overgang bij 170 naar 171.

Figuur 4 laat zien hoe de discrepanties met de correcte waarden steeds groter worden. In het begin een paar kleine foutjes, maar daarna gaat het hard. Bij 105 is het 2 punten, bij 204 voor het eerst 3, bij 264 al 4, en zo loopt het verder op. Aan het eind van de tabel, bij grote krachtsverschillen, wordt de sterkste speler flink benadeeld. Bij $p = 0{,}88$ weer die lelijke schrijffout.

### *Een denkfout*

Ten slotte heeft Elo ook nog een denkfoutje gemaakt. De gevolgen daarvan zijn minder zwaar, maar wiskundig gezien is deze fout wel het aardigst. Wanneer moet een schaker in een tienkamp 7 punten en wanneer 7,5 halen? Elo neemt, zoals gezegd, een *rating*-verschil, rekent terug naar een *z*-score, en bepaalt de winstverwachting. Hij lijkt echter te vergeten dat hij van een discrete naar een continue verdeling gaat, en dus een continuïteitscorrectie moet toepassen: 73 begint niet bij 73,0, maar bij 72,5.

Dat is eenvoudig in te zien, als we andersom redeneren en ons bijvoorbeeld afvragen wanneer iemand 72 dan wel 73 procent van de partijen moet winnen. (Dat is belangrijk voor de telling in toernooien, maar ook voor de afronding: met 72 procent moet de tienkamp met 7-3 worden gewonnen, met 73 procent met 7,5 tegen 2,5. Die ene remise kan een hoop schelen.)

Het omslagpunt ligt, zoals gezegd, bij 72,5. In een tabel met de normale verdeling zien we dat we 72,5 procent onder de curve bereiken bij 0,598 standaardafwijking. Aangezien die standaardafwijking 282,84 is, moet de omslag liggen bij $0{,}598 \times 282{,}84 = 169{,}07$ punten, afgerond 169 punten. Anders gezegd, het kleinste verschil waarbij 73 procent van de partijen moet worden gewonnen is $169{,}07 - 0{,}5 = 168{,}57$, afgerond 169 punten. Elo komt in zijn eigen tabel bij 73–27 uit op 171 als grenswaarde.

De continuïteitscorrectie leidt tot een laatste, geringe, aanpassing van de tabel: op 25 plaatsen begint net iets eerder een nieuwe klasse.

## Een verbeterde tabel

Om al deze fouten in een keer te ondervangen moet er dus een geheel nieuwe Elo-tabel worden opgesteld. Deze is uitgewerkt als tabel 2.

Uit figuur 5, waarin het verschil tussen *Elo* en *Elo+* nog eens wordt uitgezet, blijkt dat enig groot onderhoud inderdaad geen luxe zou zijn. Ook door

andere oorzaken begint het gebouw ernstige scheuren te vertonen: het hele systeem werd tussen 1981 en 1989 doorkruist toen de FIDE de regel hanteerde dat toernooiwinnaars nimmer Elo-punten hoeven in te leveren, in 1980 werden alle USCF-ratings opeens met 100 punten verhoogd, en zo wordt er meer gerommeld en geworsteld.
Het allermerkwaardigste is echter, dat de FIDE nog steeds van Elo's tabellen gebruik maakt[4]. Met de computer – en zelfs met de moderne grafische rekenmachines – is in een ommezien uit het puntenverschil de winstverwachting af te lezen en andersom, dus de benadering van een tabel is volstrekt overbodig.
In Excel bijvoorbeeld volstaat, als *D* het Elo-verschil is, de formule NORMSINV((D + 0,5)/200*SQRT(2)) om snel te berekenen welk deel van de partijen gewonnen moet worden. Niemand haalt het nog in zijn hoofd sinussen en logaritmen in tabellen op te zoeken, maar de Elo-tabel heeft een mythische status waar niemand aan mag komen.

*Noot*

*Dit artikel is een bewerking van een hoofdstuk uit de publicatie 'FC Algebra'[3], met wat nieuwe overdenkingen en argumentaties.*

*Referenties*

*[1] Arpad Elo: The rating of chess players, past and present. Londen: Batsford, 1978.*
*[2] John D. Beasley: The mathematics of games. Oxford: Oxford University Press, 1989.*
*[3] Hans van Maanen: FC Algebra. Cijfers en sport. Meppel: Boom, 1998.*
*[4] FIDE handbook 2003, deel B.02, hoofdstuk 10.1.*

*Over de auteur*

*Hans van Maanen (e-mailadres: hans@vanmaanen.org) is wetenschapsjournalist. Van zijn hand verschenen verschillende populair-wetenschappelijke boeken, waaronder 'Zoete koek en speculatie: over de rafelranden van de wetenschap' (2004), 'Echte mannen willen niet naar Mars' (2002) en de 'Encyclopedie van misvattingen' (2002).*

# TEKSTVERKLAREN BIJ WISKUNDE

## Een opdracht uit een proefwerk wiskunde-B12 voor vwo-5

[ Wim van Dijk ]

### Lees de onderstaande tekst zorgvuldig door

Er lopen twee functies op de Lijnbaan: een constante functie *C* en $e^x$.
Zegt *C* opeens: 'Kijk uit, daar komt een differentiator aan! Als die me aanraakt, blijft er niets van me over.'
Antwoordt $e^x$: 'Maak jij maar dat je wegkomt, ik ben niet bang voor hem. Mij kan hij niets doen.'
*C* duikt de eerste de beste winkel in en $e^x$ loopt recht op de differentiator af.
'Hé daar', zegt de differentiator met een onheilspellende blik in z'n ogen, 'functie, kom jij eens hier en laat me je eens goed bekijken!'
'Natuurlijk, differentiatortje', antwoordt $e^x$, 'mij maak je toch niet bang, want ik ben $e^x$!'
'Dat dacht ik al', is het antwoord, 'ik zal me ook even voorstellen: men noemt mij ook wel De Afgeleide, ... naar *y*!!
De differentiator grijpt $e^x$ bij z'n schouder en...

### Beantwoord nu de volgende vragen

a. Waarom is *C* bang voor de differentiator?
b. Verklaar het antwoord van $e^x$ en zijn gedrag.
c. Hoe loopt het met $e^x$ af? Geef een uitleg bij je antwoord.

*Over de auteur*

*Wim van Dijk (e-mailadres: w.vandijk@rml.nl) is sinds 1973 wiskundedocent op het Montessori Lyceum in Rotterdam. Hij wil in de Tweede fase het talenonderwijs voor bèta's beter laten aansluiten bij hun manier van denken, en het wiskundeonderwijs voor niet-bèta's (met name voor alfa's) beter afstemmen op hun belevingswereld door minder formulegebruik en meer aandacht voor (on)gecijferdheid.*

# BERT ZWANEVELD, HOOGLERAAR

Met ingang van 1 mei jl. is Bert Zwaneveld benoemd tot full-time hoogleraar 'professionalisering van de leraar in het bijzonder in het onderwijs in de wiskunde en de informatica' aan de Open Universiteit. De bijbehorende activiteiten liggen op het gebied van ontwerp en ontwikkeling van (afstands)onderwijs in het wiskunde- en informaticaonderwijs voor het voortgezet onderwijs waarbij de inzet van digitale hulpmiddelen wordt betrokken.
Er is gekozen voor deze twee centrale aspecten: *wiskundeonderwijs* als belangrijke kern binnen het hele bètadomein, en *informaticaonderwijs* als domein dat enerzijds een van de basispijlers is voor de Nederlandse kennismaatschappij en anderzijds een van de basispijlers voor leren en onderwijzen met gebruikmaking van digitale hulpmiddelen.
De leerstoel past binnen de taak die de Open Universiteit in 2002 opgedragen kreeg door de minister van OCenW: het leveren van een bijdrage aan de bestrijding van het lerarentekort, onder meer door de opleiding van zij-instromers in het onderwijs te verbeteren.
Samen met lerarenopleidingen en scholen ontwikkelt de Open Universiteit een instrumentarium voor leren-op-de-werkplek, door:
- het bevorderen van de instroom van nieuwe doelgroepen, in het bijzonder zij-instromers,
- het ondersteunen van beginnende leraren in hun beroepsuitoefening,
- de bestrijding van uitval, zowel van zij-instromers als van (beginnende en ervaren) leraren,
- verhoging van de reguliere instroom, en
- de vernieuwing van de opleidingen (flexibilisering en maatwerk).

Bert Zwaneveld is twee keer bij Euclides betrokken geweest, de eerste keer als hoofdredacteur/redactievoorzitter, de tweede keer alleen als voorzitter (met hoofdredacteuren Martinus van Hoorn en Kees Hoogland).
Naast zijn werkzaamheden voor de Open Universiteit is hij onder meer voorzitter van de vaksectie wiskunde A (havo/vwo) van de CEVO, de commissie die de eind-examenopgaven van het voortgezet onderwijs vaststelt.
Bert, namens bestuur en redactie van harte gefeliciteerd, en heel veel succes gewenst in je nieuwe functie!

# VOUWBARE VERHOUDING

[ Willem Maas ]

Mijn neef Kim van Wetten studeert elektronica aan de hts en geeft bijlessen wiskunde op het Koning Willem II College te Tilburg. Kim is al van jongs af zeer geïnteresseerd in alles wat met wiskunde te maken heeft en zodoende probeert hij ook leerstof te ontwerpen die leerlingen *moet* kunnen boeien. Onlangs bedacht hij het volgende probleem.

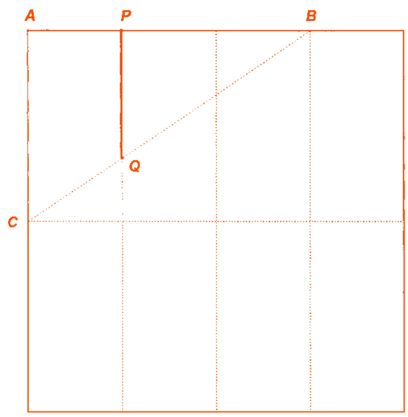
*Kun je in een vierkant stuk papier, zonder een hulpmiddel te gebruiken, een lijnstuk vouwen waarvan de lengte een derde deel is van de zijde van het vierkant?*

Ik moet eerlijk toegeven dat ik na enig proberen niet tot een sluitende oplossing kwam. De helft bepalen is simpel, maar een derde deel? En inderdaad, het is een vraagstuk dat uitnodigt tot nadenken en uitproberen.

Kim kwam al wel vrij snel zélf tot een aardige oplossing; zie de figuur.
Vouw het vierkant volgens de aangegeven lijnen.
Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken $ABC$ en $PBQ$ volgt: de lengte van $PQ$ is $\frac{1}{3}$ van de lengte van de zijde.

## Vraag aan de lezer

Welke verhoudingen zijn er nog meer 'vouwbaar in een vierkant'?




*Over de auteur*

*Ing. W. Maas (e-mailadres: willem.maas@tiscali.be) is docent wiskunde en economie aan het Koning Willem II College te Tilburg.*

# Boekbespreking / Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht

**Auteur: Mark Haddon (vertaald door Harry Pallemans)**

**Uitgever: Contact/De Fontein (2003) isbn 90 254 1674 0 287 pagina's (hardcover)**

**prijs: € 14,50** **[ Peter Lanser ]**




Wiskundeleraren zijn op zijn minst een beetje vreemd, en des te meer als je het vak ook nog eens leuk vindt. Althans, dat is de overtuiging van een aantal van mijn leerlingen op de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven. Op de vraag wat er nou zo leuk aan is antwoord ik steevast dat het zo mooi in elkaar zit. Meewarige blikken zijn vervolgens mijn deel.

Christopher Boone, vijftien jaar oud, begrijpt mijn standpunt. Hij is echter geen leerling van me, maar de hoofdpersoon in 'Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht' van de onlangs met de Zilveren Zoen bekroonde Britse kinderboekenschrijver Mark Haddon. In een door hemzelf verteld verhaal gaat hij op zoek naar degene die een hond uit zijn straat gedood heeft. Daarbij belandt hij ook in de grote stad Londen, en dat wordt een heuse nachtmerrie. Niet omdat hem van alles overkomt, maar omdat de informatie die op hem afkomt hem bijna verplettert. Christopher is namelijk autistisch.
Het dagelijkse bombardement van zintuiglijke indrukken kan hij niet uitfilteren. En beeldspraak interpreteert hij letterlijk, zoals de uitdrukking 'hij sprong uit zijn vel'. Om die reden doet hij niet altijd wat hem wordt gezegd. 'En dat komt omdat het meestal verwarrend en niet te snappen is wat mensen zeggen dat je moet doen. Mensen zeggen vaak "Stil zijn", maar ze zeggen er niet bij hoe lang je stil moet zijn.' Je zult maar dertig van zulke leerlingen in je klas hebben...
In de voor hem chaotische wereld zoekt Christopher koortsachtig naar eenduidigheid, en die vindt hij in wiskunde. Het in zijn hoofd oplossen van vierkantsvergelijkingen, of 2 zo ver mogelijk verdubbelen, dat geeft hem rust. Zijn record staat zelfs op 2 tot de macht 45. Voor het vwo wiskunde B1 examen (een wat ongelukkige vertaling, omdat het suggereert dat het verhaal zich in Nederland afspeelt), waar hij na veel soebatten aan mee mag doen, haalt hij een 10.

'Het wonderbaarlijke voorval met de hond in de nacht' is het zoveelste boek dat het idee zou kunnen bevestigen dat mensen die wiskunde leuk vinden op een of andere manier toch altijd minstens een beetje van lotje getikt zijn. Beter dus om dit in mijn ogen zeer onderhoudende boek, dat voor volwassenen én kinderen op een overtuigende wijze het leven van een autist schetst en dat ook verfilmd gaat worden, voor mijn leerlingen te verzwijgen? Nee, dat doe ik niet. Want je kunt er net zo goed het idee uit opdoen dat wiskunde een aangenaam gevoel kan opleveren, óók bij autisten. Maar hun idee dat ik alleen met wiskunde bezig ben, zal ik hiermee evenwel niet ontkrachten.

*Over de recensent*

*Peter Lanser (e-mailadres: p.lanser@wpkeesboeke.nl)is wiskunde-docent op de Werkplaats Kindergemeenschap in Bilthoven. Hij is auteur van het Zebra-boekje 'De laatste stelling van Fermat' (deel 7).*

# IN MEMORIAM WIM BOS 1916–2004

[ Anne van Streun ]

## Inleiding

Op 1 juni jl. is Wim Bos overleden.
Dit is niet de plaats om het leven van Wim Bos en zijn betekenis voor het wiskundeonderwijs te beschrijven. Het voortreffelijke artikel van Harm Jan Smid in het aprilnummer van Euclides geeft daar een goed beeld van.[1] Graag wil ik een persoonlijke aanvulling geven. Zelf behoor ik niet tot de bevoorrechte lieden die indertijd op de hbs of het gymnasium meetkunde uit de werkboeken van Bos&Lepoeter hebben geleerd. De term 'bevoorrecht' gebruik ik niet ironisch of toevallig. Met name toen de herinvoering van de Euclidische meetkunde in het profiel Natuur&Techniek van het vwo aan de orde was, hebben tientallen collega's en leraren mij verteld hoeveel zij uit die boeken hadden geleerd en hoe motiverend die boeken waren. En nu bedoel ik niet de wiskundigen, maar juist ook de niet-wiskundigen, zoals de voorzitter van de KNAW en andere wetenschappers.

## Onbevredigend

Voor mij, als beginnend wiskundeleraar in de jaren 1964-1970, was aanvankelijk het onderwijs in de vlakke meetkunde heel onbevredigend. Hoe goed ik die meetkunde in de klassen 1, 2 en 3 ook uitlegde, op de repetities was er altijd een scherpe scheiding tussen de *have*'s en de *have-not*'s. De laatsten klaagden erover dat je die meetkunde niet kon leren, je zag het of je zag het niet! Mijn ervaren collega's bevestigden dat beeld. Zelf had ik daar geen vrede mee, want op die manier toets je niet de resultaten van onderwijs maar een vorm van intelligentie.

## Systematische probleemaanpak

Bij mijn speurtocht in andere schoolboeken (in mijn boekenkast stonden indertijd de presentexemplaren van zeker tien meetkundemethoden) naar een verbetering van mijn didactiek, stuitte ik op die geheel afwijkende boeken van Bos&Lepoeter. Daarin ging het over een systematische probleemaanpak, over de analyse van de gegeven situatie, van het gevraagde en van het verschil tussen beide, over het operationaliseren van kennis (welke stellingen kun je gebruiken om te bewijzen dat twee lijnstukken gelijk zijn?), enzovoort. Voor mij ging een nieuwe wereld open. Kun je leerlingen inderdaad leren om beter problemen op te lossen? In leergesprekken introduceerde ik die werkwijze, en demonstreerde ik de vragen die je jezelf als oplosser kunt stellen. En het werkte! Veel meer leerlingen dan voorheen beredeneerden welke hulplijn ze konden trekken, hoe ze door terugredeneren een bewijs konden vinden, ... De resultaten op mijn meetkundeproefwerken verschilden sindsdien significant van die van mijn collega's.

Helaas overspoelde de hype van 'modern' wiskundeonderwijs ons land na 1968 en ging de didactische discussie daarna jarenlang alleen maar over de wiskundige taal en niet over wat je aan de hand van wiskunde nog meer kunt leren. Inmiddels had ik een baan als wiskundedidacticus bij de Rijksuniversiteit Groningen gekregen en kreeg ik vanaf 1984 tijd om een promotieonderzoek voor te bereiden. Mijn eerste externe gesprek over mijn plan om onderzoek te doen naar een heuristische didactiek van wiskundeonderwijs was met Adriaan de Groot, de bekende psycholoog en methodoloog. Hij verwees mij ook naar zijn oude studievriend (wiskunde en psychologie aan de Universiteit van Amsterdam) Wim Bos, die natuurlijk al op mijn lijstje stond. Hij bleek een aimabel mens te zijn, die mij graag op de hoogte bracht van zijn werk en met een zekere mildheid terugkeek op zijn werk in die pre-mammoet periode. Zoals ik al vermoedde op grond van de artikelen in Euclides in die tijd, had hij met zijn leerpsychologische benadering (de oplossingsmethoden van Selz) weinig bijval gekregen van de wiskundigen, zoals Freudenthal, die de dienst uitmaakten in de vaststelling van leerplannen en het doordenken van een wiskundedidactiek. Zijn triomf was natuurlijk dat tot op de dag van vandaag de meetkundeboeken van Bos&Lepoeter een begrip zijn gebleven.

## Nog steeds actueel

In de jaren 1984-1994 hebben wij veel contact gehad en hij was ook blij verrast dat zijn ideeën aangepast terug te vinden waren in het meetkundeboek van 'Moderne wiskunde' van het profiel Natuur&Techniek (vwo). Zie daarvoor het al genoemde artikel van Harm Jan Smid. Zelf was ik heel verbaasd dat in de andere meetkundeboeken zo weinig gebruik gemaakt werd van de didactische kennis uit die pre-mammoet periode. Tal van artikelen uit Euclides in de jaren 1950-1960, waaronder die van Wim Bos, geven degelijke en waardevolle analyses van de didactiek van het meetkundeonderwijs in de onderbouw van het vhmo. De meetkundige inhoud van die onderbouw dekt het overgrote deel van de meetkunde in het vwo-profiel. Of dat meetkundeonderwijs ook nu nog van waarde is voor de intellectuele ontwikkeling van onze leerlingen hangt naar mijn mening geheel en al af van de didactiek van dat meetkundeonderwijs. Als er niets meer te leren valt dan enige kennis over klassieke meetkundestellingen, dan kan het inderdaad maar beter worden geschrapt, zoals nu weer dreigt. Maar onder dat oordeel valt een groot deel van onze schoolwiskunde, ben ik bang.

*Noot*

*[1] Harm Jan Smid: Bos en Lepoeter. In: Euclides 79(6), april 2004.*

*Over de auteur*

*Anne van Streun (e-mailadres: a.van.streun@fwn.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen.*

# ZIGZAGPERMUTATIES

[ Rob Bosch ]

Er zijn zoals bekend $6! = 720$ permutaties van de verzameling 1, 2, ..., 6. Een aantal van die permutaties heeft de eigenschap dat ze geen monotone rij van meer dan twee elementen bevatten, anders gezegd de volgorden van groot naar klein en van klein naar groot wisselen elkaar steeds af. Dergelijke permutaties noemen we hier *zigzagpermutaties*. Zo zijn (523164) en (462315) twee zigzagpermutaties van 1, 2, ..., 6. Hoeveel zigzagpermutaties van 1, 2, ..., 6 zijn er?

**TABEL 1**

| $n=3$ | | $n=4$ | |
|---|---|---|---|
| 213 | 231 | 4231 | 1324 |
| 312 | 132 | 4132 | 1423 |
| | | 2143 | 3412 |
| | | 3241 | 2314 |
| | | 3142 | 2413 |

Voor kleine $n$ kunnen we het aantal zigzagpermutaties vinden door ze allemaal op te schrijven. Voor $n = 3$ en $n = 4$ staan de zigzagpermutaties in tabel 1.
Als $Q_n$ het aantal zigzagpermutaties van 1, 2, ..., $n$ is en we gemakshalve $Q_0 = 1$ nemen, vinden we voorlopig het volgende lijstje:

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Q_n$ | 1 | 1 | 2 | 4 | 10 |

In het vervolg zullen we een recursie opstellen waarmee het aantal zigzagpermutaties voor grotere $n$ berekend kan worden.
We merken eerst op dat permutaties die stijgend beginnen, door spiegeling overgaan in permutaties die dalend beginnen. Deze spiegeling wordt gegeven door

$$(\sigma(1), \sigma(2),..., \sigma(n)) \rightarrow (n+1-\sigma(1), n+1-\sigma(2),..., n+1-\sigma(n))$$

Deze spiegeling voert de zigzagpermutatie (461325) die stijgend begint, over in de zigzagpermutatie (316452) die dalend begint. Merk op dat in het lijstje van zigzagpermutaties voor $n = 3$ en $n = 4$ de permutaties in het linker- en rechterrijtje elkaars spiegelbeeld zijn. Het aantal zigzagpermutaties dat stijgend begint, is derhalve gelijk aan het aantal zigzagpermutaties dat dalend begint. In tabel 1 voor $n = 3$ en $n = 4$ staan in het linkerrijtje de permutaties die dalend beginnen; in het rechterrijtje staan de spiegelbeelden. Laat $P_n$ het aantal zigzagpermutaties zijn dat stijgend begint. Uit het voorgaande volgt dat $P_n$ gelijk is aan de helft van het aantal zigzagpermutaties, anders gezegd $Q_n = 2P_n$.
Merk nog op dat het aantal zigzagpermutaties dat stijgend eindigt, gelijk is aan het aantal dat dalend eindigt. Dit volgt direct door de permutaties van achteren naar voren te lezen.

Zij $(a_1a_2...a_{k-1}na_{k+1}...a_n)$ een zigzagpermutatie van 1, 2, ..., $n$ waarbij $n$ op plaats $k$ staat. De getallen $a_1$, $a_2$, ..., $a_{k-1}$ links van $n$ vormen een zigzagpermutatie die dalend eindigt, terwijl de getallen $a_{k+1}$, $a_{k+2}$, ..., $a_n$ rechts van $n$ een zigzagpermutatie vormen die stijgend begint. Het aantal van deze zigzagpermutaties is resp. $P_{k-1}$ en $P_{n-k}$.

Aangezien de getallen $a_1$, $a_2$, ..., $a_{k-1}$ op $\binom{n-1}{k-1}$ manieren kunnen worden gekozen, is het aantal zigzagpermutaties met $n$ op plaats $k$ gelijk aan

$$\binom{n-1}{k-1}P_{k-1}P_{n-k},\quad 1 \le k \le n$$

Sommeren over de mogelijke posities van $n$ geeft

$$Q_n = 2P_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}P_{k-1}P_{n-k}$$

Deze uitdrukking kunnen we schrijven als

$$2P_n = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{P_{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{P_{n-k}}{(n-k)!}$$

of

$$\frac{2P_n}{(n-1)!} = 2n\frac{P_n}{n!} = \sum_{k=1}^{n}\frac{P_{k-1}}{(k-1)!}\cdot\frac{P_{n-k}}{(n-k)!}$$

Door $p_n = \frac{P_n}{n!}$ te substitueren vereenvoudigen we de uitdrukking tot

$$2np_n = \sum_{k=1}^{n} p_{k-1}p_{n-k}$$

Hierin is $p_n$ de helft van de fractie zigzagpermutaties van 1, 2, ..., $n$. Voor deze fracties vinden we dus de volgende recursie:

$$2np_n = p_0p_{n-1} + p_1p_{n-2} + p_2p_{n-3} + ... + p_{n-2}p_1 + p_{n-1}p_0 \quad (1)$$

Met behulp van deze recursie bereken we het aantal zigzagpermutaties voor $n = 5$:

$$2 \cdot 5p_s = p_0p_4 + p_1p_3 + p_2p_2 + p_3p_1 + p_4p_0$$

Uit het lijstje in de inleiding volgt dat $p_0 = p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ en $p_4 = \frac{5}{4!} = \frac{5}{24}$ en dus

$$10p_s = 1 \cdot \tfrac{5}{24} + 1 \cdot \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \cdot 1 + \tfrac{5}{24} \cdot 1 = \tfrac{4}{3}$$

waaruit volgt dat $p_5 = \frac{2}{15}$. We zien dat $P_5 = 5! \cdot \frac{2}{15} = 16$ zodat het totaal aantal zigzagpermutaties van 1, 2, ..., 5 gelijk is aan 32. De lezer kan hiermee nu eenvoudig het aantal zigzagpermutaties voor $n = 6$ bepalen.

De recursie (1) stelt ons in staat met wat rekenwerk of een computerprogrammaatje ook voor grote $n$ het aantal zigzagpermutaties te berekenen.
Het expliciet oplossen van de recursie is geen eenvoudige zaak. Maar toch kan er nog wel wat aardigs over de getallen $p_n$ gezegd worden.
De zogenoemde *genererende functie* van de rij $p_n$ is

$$P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + ...$$

Omdat $p_i < 1$ voor alle $i$, convergeert de bovenstaande reeks in ieder geval voor $-1 \leq x \leq 1$.
Voor $P^2(x)$ geldt:

$$P^2(x) = p^2{}_0 + (p_0p_1 + p_1p_0)x + (p_0p_2 + p_1p_1 + p_2p_0)x^2 + (p_0p_3 + p_1p_2 + p_2p_1 + p_3p_0)x^3 + ...$$

Met recursie (1) krijgen we

$$\begin{aligned} P^2(x) &= p_0 + 2 \cdot 2p_2x + 2 \cdot 3p_3x^2 + 2 \cdot 4p_4x^3 + ... \\ &= p_0 + 2(2p_2x + 3p_3x^2 + 4p_4x^3 + ...) \end{aligned}$$

Hierin herkennen we de afgeleide van $P(x)$:
$P'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 + 4p_4x^3 + ...$
zodat

$$\begin{aligned} P^2(x) &= p_0 + 2(P'(x) - p_1) \\ &= 1 + 2(P'(x) - 1) \\ &= 2P'(x) - 1 \end{aligned}$$

Schrijven we $\frac{P'(x)}{P2(x) + 1} = \frac{1}{2}$, dan herkennen we in het linkerlid de afgeleide van arctan, zodat

$$\frac{\mathrm{d}(\arctan(P(x))}{\mathrm{d}x} = \tfrac{1}{2}.$$

Hieruit volgt dat $\arctan(P(x)) = \frac{1}{2}x + C$ of $P(x) = \tan(\frac{1}{2}x + C)$.

Aangezien $P(0) = p_0 = 1$, is $\tan(C) = 1$, zodat $C = \frac{\pi}{4}$, en dus

$$P(x) = \tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4})$$

Combinatie van

$$P(x) = \tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4}) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + ...$$

$$P(-x) = \tan(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4}) = p_0 - p_1x + p_2x^2 - p_3x^3 + 2p_5x^5 + ...$$

geeft

$$\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4}) - \tan(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4}) = 2p_1x + 2p_3x^3 + 2p_5x^5 + ... \quad (2)$$

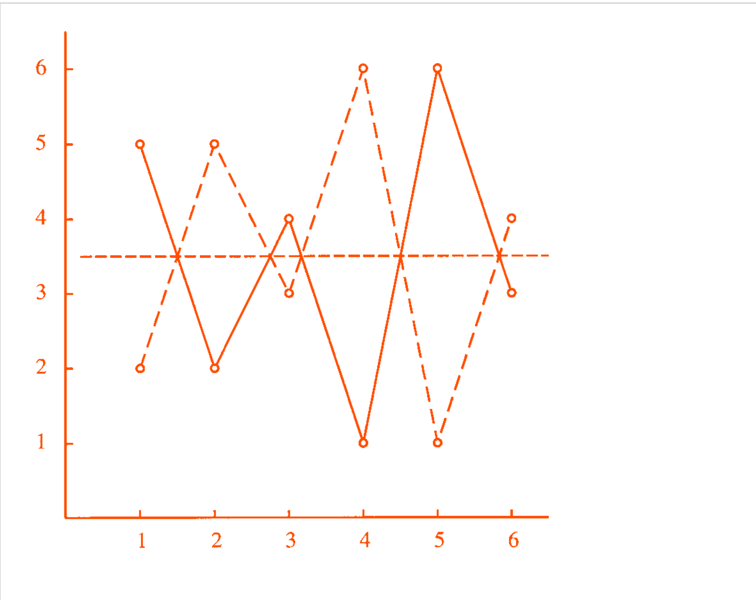
Uit $(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) + (-\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}$ volgt dat

$$\tan(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4}) = \frac{1}{\tan(-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{\pi}{4})} \quad (3)$$

Met de goniorelatie $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$ en met gebruikmaking van (3) gaat het linkerlid van (2) over in $2\tan x$, zodat

$$\tan x = p_1x + p_3x^3 + p_5x^5 + ...$$

In de tangensreeks duiken kennelijk de zigzagpermutaties op - een resultaat dat je toch moeilijk vanuit de verte al kunt zien aankomen.




*Over de auteur*

*Rob Bosch (e-mailadres: r.bosch2@mindef.nl) is als docent verbonden aan de Koninklijke Militaire Academie te Breda. Hij is tevens redacteur van Euclides.*

# ALGEBRA: VERLOREN ZAAK OF UITDAGING?

## Deel 1 - Persoonlijke en collectieve observaties

[ Metha Kamminga ]

### Overweging vooraf

*Een tijdje terug reden wij met vrienden, die een GPS (Global Positioning System) in de auto hebben, een route naar een plek in Friesland. De route was ingevoerd in het apparaat van begin naar eindbestemming. Onze vriend, die aan het stuur zat, volgde door het binnenland van Friesland de geprogrammeerde route. Op een gegeven moment zei onze vriendin, toen we door een dorp reden, dat in dit dorp kennissen woonden. 'Nee toch, die wonen in St. Annaparochie!', zei de chauffeur, waarop we met zijn allen riepen dat we hier nou juist in St. Annaparochie waren.*

*Wat ik hiermee zeggen wil: men denkt dat de noodzaak om voortdurend te weten waar je bent overbodig is bij het gebruik van bepaalde apparatuur.*

*Ook op zee is het mijn bemanning soms maar moeilijk uit te leggen dat er elk uur een kruisje in de kaart gezet dient te worden, ondanks het gebruik van GPS. Alle informatie die van buiten op je afkomt bij de navigatie moet meegenomen worden om goede beslissingen te kunnen nemen.*

*Dit ter overweging vooraf.*

### Inleiding

Op 17 april 2004 vond in het kader van het Nederlands-Belgisch Mathematisch Congres 2004 een mini-symposium plaats over didactiek van de wiskunde, onder de titel: *Algebra: verloren zaak of uitdaging?*

Tamelijk algemeen worden het algebraonderwijs in het voortgezet onderwijs en de algebraïsche vaardigheden van eerstejaars studenten in het hbo en wo op dit moment als ontoereikend ervaren. Ter voorbereiding van dit minisymposium is er in het netwerk van de werkgroep-hbo van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren een informatieronde gehouden waarin unaniem de zorg werd uitgesproken over de teruglopende algebraïsche vaardigheden van de instromende eerstejaars uit havo en mbo.

Bert Zwaneveld bracht tijdens het symposium de problematiek in kaart, Dirk Janssens gaf een aantal voorbeelden van het gebruik van een computer-algebrasysteem met zijns inziens positieve effecten en Metha Kamminga leidde tot slot een discussie met de zaal. In een drietal artikelen gaan we in op de problematiek van het algebraonderwijs.

### Vijf aspecten

Er was naast deze problematiek een tweede aanleiding om aandacht aan algebra te besteden: het verschijnen van het proefschrift van Paul Drijvers, *Learning algebra in a computer algebra environment, Design research on the understanding of the concept of parameter*, waarop hij op 25 september 2003 aan de Universiteit Utrecht gepromoveerd is. Aan dit proefschrift ontlenen we de volgende vijf aspecten van de problematiek van het algebraonderwijs:

1. Het formele, algoritmische karakter van algebraïsche procedures waardoor de leerling geen relatie kan leggen met informele, betekenisvolle benaderingen.
2. Het abstracte niveau waarop de problemen worden opgelost, abstract in vergelijking met de concrete situaties van die problemen, waardoor de leerling geen betekenis aan de wiskundige objecten kan geven op dat abstracte niveau.
3. De noodzaak om het verloop van het totale proces van oplossen goed in de gaten te houden bij het uitvoeren van de elementaire algebraïsche procedures die een onderdeel van dat totale proces zijn.
4. De compacte algebraïsche taal met de specifieke conventies en symbolen.
5. Het objectkarakter van algebraïsche formules en uitdrukkingen, terwijl de leerling die vaak opvat als een opdracht die verder 'uit te rekenen'. Dit heet wel het *lack of closure* obstakel. De leerlingen denken dan dat een algebraïsche uitdrukking als $2a + 1$ niet af is en verder 'uitgerekend' moet worden zoals ze gewend zijn met rekenkundige uitdrukkingen als $2 \cdot 7 + 1$.

### Drie artikelen

In dit eerste artikel uit de reeks van drie geeft Metha Kamminga een aantal observaties uit haar lespraktijk: wiskunde bij Engineering op het hbo en een korte weergave van de discussie zoals die zich ontspon aan het eind van het minisymposium tussen de deelnemers, zo'n 25 wiskundeleraren van alle geledingen uit Nederland en Vlaanderen, didactici en universitaire en hbo-wiskundedocenten. In het tweede artikel zal Bert Zwaneveld van de Open Universiteit een nadere analyse van de problematiek geven en in het derde artikel beschrijft Dirk Janssens van de Universiteit te Leuven een aantal voorbeelden uit zijn lespraktijk

waarbij een computeralgebrasysteem een goede bijdrage blijkt te kunnen leveren.

Wat is het probleem, hoe zouden we het graag zien, waardoor komt de achterstand en wat valt er aan te doen – dit wordt in de volgende punten belicht.

## Persoonlijke observaties

Hier volgt een aantal punten die ikzelf opteken bij het werken met studenten op het hbo, afdeling Engineering. Ik refereer daarbij aan de bovengenoemde vijf punten van Paul Drijvers.
Zoals uit de informatieronde onder de contacten van de werkgroep-hbo is gebleken, wordt het als een probleem ervaren dat binnenkomende studenten niet meer formulevaardig zijn en zelfs formuleangst vertonen. Het bemoeilijkt de communicatie en wekt ergernis op. Wat daarvan de oorzaak is proberen we te achterhalen om vervolgens aan oplossingen te gaan denken. Laat ik beginnen met hoe we het graag zouden zien.
Wat zou je willen dat studenten kunnen als ze op het hbo binnenkomen bij een bètaopleiding?

- Je zou willen dat ze getalsmatig wat minder 'rekenmachinetaal' bezigen. We krijgen studenten binnen bij het hbo die denken dat $3 \times \frac{1}{3}$ gelijk is aan 0,9999. Oftewel, als je drie taarten te verdelen hebt met zijn drieën, dan krijgt ieder 0,9999 van een taart. (Zie aspect 1 uit het lijstje van Paul Drijvers.)
Mogelijke oorzaak: de verregaande afhankelijkheid van de rekenmachine en niet meer op elk moment weten waar je bent.
- Je zou willen dat er wat meer begrip is van het =-teken. Het =-teken wordt op het moment door binnenkomende studenten gezien als een soort afsluitteken om een numerieke waarde te verkrijgen na het intikken van een berekening op de rekenmachine. Dat het =-teken ook gebruikt wordt tussen twee gelijkwaardige uitdrukkingen staat erg ver af van het dagelijks gebruik ervan. Mijn studenten die algebraïsche vaardigheden oefenen met behulp van digitale oefentoetsen waarbij ook meerdere antwoorden goed kunnen zijn, gaan de gelijkheden controleren door middel van invullen van getallen in de rekenmachine. Dus bijvoorbeeld dat $(a - b)$ gelijkwaardig is met $-(b - a)$ wordt niet gecontroleerd door de rekenregels toe te passen, maar door willekeurige getallen voor $a$ en $b$ in te vullen en daaraan conclusies te verbinden. Een nóg extremer geval deed zich voor bij het opstellen van een model van een fysische situatie. Er werd in groepjes gewerkt en de ene helft van een groep had een ander model opgesteld dan het andere deel. Om nu te kijken of de modellen misschien wel hetzelfde waren vulde men voor $t$ de waarde 0 in en concludeerde dat beide modellen in formulevorm dan 0 opleverden en *dus* dat de modellen gelijkwaardig waren. (Zie de aspecten 2 en 5.)
Mogelijke oorzaak is het vermijdingsgedrag om algebra toe te passen als het ook 'zonder' algebra tot een goed antwoord kan leiden? Nemen we misschien alleen genoegen met het antwoord van onze studenten en beoordelen we niet meer de weg er naar toe?
- Je zou willen dat het parametriseren en modelleren wat meer ontwikkeld was bij een binnenkomende bètastudent op het hbo. Met al die realistische wiskunde zou je toch mogen verwachten dat studenten in het voortgezet onderwijs geleerd hebben om realistische problemen in formules te vangen. Ik doe even een proefje bij een paar van mijn studenten die iets voor mij moeten uitrekenen met hun rekenmachine. Dat kunnen ze goed. Ze kunnen ook vertellen hoe ze het hebben uitgerekend met vermenigvuldigen en delen enzovoort. Maar als ik vraag om de formule op te schrijven van hetzelfde (zeer eenvoudige) rekenmodel, maar nu niet met concrete getallen maar met letters, dan blijft het stil en lukt het ze niet (aspect 2). Dit is precies wat Zwaneveld in het vervolgartikel beschrijft met de 'laatste vragen' van de vo-examenopgaven. Hij zal laten zien dat het niet meer lukt in een situatie waarbij er een appèl gedaan wordt op een iets hoger abstractieniveau. Paul Drijvers noemt dat het overgaan naar het 'verticaal mathematiseren'. Mijn studenten hebben dit bij het binnenkomen op het hbo-bèta niet meer in huis, ze hebben moeite met het bekende *symbol sense*.
Mogelijke oorzaak is dat de formuleangst daarbij een rol speelt en dat het op het vo-examen een sluitpost is. Het cijfer 5 of 6 wordt ook wel gehaald met alleen de eenvoudige invuloefeningen die ze wel goed kunnen met de rekenmachine.
- Je zou willen dat de stappen die genomen moeten worden bij het oplossen van problemen, door de hbo-studenten zelf bedacht worden en dat niet alles stap voor stap voorgezegd hoeft te worden, zoals ze gewend zijn geweest op het vo. (Het op ieder moment weten waar je bent en van daaruit je koers bepalen.)
De oorzaak van dit probleem ligt misschien in de manier van toetsen. Het opschrijven en verantwoorden van het oefenen met modellen en ermee rekenen is moeilijk te toetsen op een Centraal Examen en moet dus stap voor stap begeleid worden om ze nog enigszins te laten scoren (aspect 3).
- Op veel hbo-instellingen wordt een computeralgebrasysteem (CAS) gebruikt. Je zou dan willen dat het wiskundig taalgebruik en de juistheid van de notatie wat beter aangebracht was bij de studenten. Geef bijvoorbeeld de afgeleide naar $t$ niet aan met een accent, maar met een stip of de notatie $\frac{df}{dt}$ (om nog maar niet te spreken van een kromme d als er nog meer variabelen in het spel zijn). Doe dat zeker op deze manier als er ook nog de parameters $a$ en $b$ voorkomen. Hoe kan een student nu uit elkaar houden waarnaar er gedifferentieerd moet worden als er in de opgaven al slordig mee omgesprongen wordt? (Aspect 4.)
Een CAS dwingt je om daarover een uitspraak te doen en daar over na te denken. Misschien is de oorzaak van het gebrek aan formulevaardigheid op dit punt wel het te weinig ermee omgaan in een computeralgebra-omgeving waarbij je meer na moet denken over de betekenis van de formules en wat je er mee kunt doen.

- Je zou willen dat studenten bepaalde dingen uit het hoofd kunnen, gewoon om de communicatie vlotter te laten verlopen. De ene ingenieur schrijft een formule zus op en de andere ingenieur zo. Een rekenapparaat of CAS op het hbo geeft dezelfde formule misschien nóg anders weer. (Aspecten 1 t/m 5.) Ik merk bij studenten dat er een zekere formuleangst is, die echter met enige training gedurende de gehele loopbaan overwonnen kan worden.
- Specifiek bij gebruik van een CAS in het hbo is het opvallend dat de studenten bij het uitwerken van een opdracht eerst aan alle variabelen waarden toekennen en daarna pas het model invoeren in de computer! Studenten zijn dit zó gewend bij het omgaan met de rekenmachine dat deze manier van werken eigenlijk niet meer terug te draaien valt. Er worden op deze manier nauwelijks nog formules bestudeerd of op waarde geschat; het enige belangrijke schijnt het numerieke 'antwoord' te zijn. Het 'algebra-probleem' (aspect 2) wordt op deze manier omzeild. Het zit helemaal vastgebakken in de hoofden om meteen met numerieke waarden aan de gang te gaan. Na bijna een jaar in het hbo vervallen de studenten vaak toch weer in deze manier van doen. Eerst het model opstellen en daarna de parameters waarden geven geeft echter meer inzicht in het model (formule) en de onderlinge verbanden tussen de grootheden, en daarmee ook de *symbol sense*.
- Een probleem dat met het vorige te maken heeft is dat veel docenten die in het hbo computeralgebra hanteren, deze manier van werken ook graag bij de toegepaste vakken zouden willen inzetten. Kennis van structuren kan dan operationeel ingezet worden. Iedere keer dat er bij de toegepaste vakken een situatie voorkomt met meer vergelijkingen met meerdere onbekenden, is het vaak nog zó ingericht dat het met het in elkaar invullen van de vergelijkingen met de hand moet lukken, terwijl in een CAS de structuur veel duidelijker wordt. Je hebt bijvoorbeeld een *stelsel* van vergelijkingen (met evenzovele onbekenden) en dat kun je in één keer oplossen naar de onbekenden. De structuur van wat je doet is wel compacter, maar kan daardoor een stuk helderder worden (aspect 3). Hiervan volgt een voorbeeld in het vervolgartikel van Janssens.

## Discussie

Naar aanleiding van de presentaties van Zwaneveld en Janssens ontspon zich de volgende discussie tussen de aanwezigen.

*1. Wat is nu eigenlijk het echte probleem?*
De meest essentiële opmerking was deze vraag, gesteld door Harm Jan Smid: Er worden wel veel oplossingen aangedragen, maar er is nog onvoldoende aangegeven voor welke problemen ze de oplossing zijn. Het voorlopige antwoord waarop de zaal het eens werd, luidt dat op dit moment niet duidelijk is wat de leerlingen van havo en vwo aan algebraïsche vaardigheden paraat moeten hebben met het oog op hun vervolgopleiding, die immers niet voor iedereen een bètaopleiding is. Het voortgezet onderwijs en het erop volgend hoger onderwijs moeten daarover heel heldere afspraken maken: wie doet wat? Dat betekent bijvoorbeeld ook geen allang achterhaalde trucjes in het vervolgonderwijs. Dit kan niet aan de politiek overgelaten worden. Op basis van die afspraken kan vervolgens worden vastgelegd wat in het centraal examen zal worden afgevraagd. Iets meer geoperationaliseerd zou dat als volgt kunnen worden ingevuld. Voor sommige leerlingen kan met de algebra van de onderbouw volstaan worden. Voor leerlingen met wiskunde-A12 verdienen algebra en de vaardigheden die daarmee samenhangen een grotere plaats dan op dit moment het geval is (zonder op het punt van de contexten concessies te doen). Voor de leerlingen die een technische of bètaopleiding gaan volgen, geldt dat zij minimaal (en dus via het centraal examen 'afgedwongen') aan de algebraïsche eisen van het huidige wiskunde B1 programma voldoen. De feitelijke eisen liggen hoger, maar dat wordt aan de docenten overgelaten en via het schoolexamen met toezicht van de inspectie afgevraagd. Het verdient sterke overweging om bij het centraal examen wiskunde-B geen contexten en geen rekenmachine toe te staan, maar deze juist in het schoolexamen op te nemen.

Een andere manier om naar het onderscheid in de verschillende doelgroepen leerlingen te kijken is de volgende. Voor sommige leerlingen kan volstaan worden met een horizontale mathematisering: zij moeten wiskundige objecten leren, dat wil zeggen contextueel en conceptueel en die in vergelijkbare situaties op 'horizontaal' gelegen niveau toepassen, zonder al te veel gekunstelde voorbeelden. Andere leerlingen moeten in staat zijn wiskundige objecten te gebruiken en toe te passen in vervolgsituaties die 'verticaal' boven de oorspronkelijke situaties liggen en die zowel zuiver wiskundig als meer toegepast van aard kunnen zijn. Het heeft te maken met modelleren in concrete situaties en je eigen stappenplan bedenken naar de oplossing.

*2. Oplossingen op programmaniveau*
In vervolg op dit eerste punt werd nog opgemerkt dat het programma (dus) wel eens minder omvangrijk zou kunnen worden: minder onderwerpen, om de dingen die er echt toe doen beter te doen zonder hierbij uren in te leveren. Wellicht dat dit nog meegenomen kan worden bij de aanpassingen die er voor de tweede fase op stapel staan.
Door ook de algebra in de onderbouw, te beginnen in de brugklas, en de tweede fase een serieuze plaats te geven en te blijven onderhouden met training, zullen de leerlingen de algebra ook meer serieus nemen. Nu hangt het er net iets te veel bij. En, zo was de algemene inschatting, leerlingen in havo en vwo kunnen de abstractie die voor het manipuleren met formules nodig is heus wel aan, mits dat goed gedoceerd en goed gedoseerd gebeurt en ze ook echt uitgedaagd worden. Dat hoeft echt niet uitgesteld te worden tot na het voortgezet onderwijs, nee juist niet,

want dan zijn ze waarschijnlijk nog minder gevoelig voor het leren van de inderdaad abstracte rekenregels. En wellicht leidt meer (serieuze) algebra uiteindelijk tot meer bèta- of techniekstudenten.

*3. De rol van contexten*
De contexten waarin de wiskunde wordt aangeboden en de contextgebonden problemen die leerlingen moeten oplossen moeten serieus zijn, geen duidelijk verzonnen en gekunstelde problemen.

*4. Het gebruik van een computeralgebrasysteem*
Dit hulpmiddel inzetten als contextueel en conceptueel duidelijk is waar het over gaat. De tekstverwerker bij een dergelijk systeem kan daarbij een grote rol spelen zodat het mogelijk is, studenten en leerlingen niet alleen af te rekenen op een 'antwoord' maar ook af te rekenen op de weg naar het antwoord toe in al zijn aspecten. Er werd opgemerkt dat het leren werken met een computeralgebrasysteem erg veel tijd kost, iets dat absoluut niet onderschat mag worden.
Maar, zo vertelden sommige aanwezigen vanuit hun ervaring, als je goed met een computeralgebrasysteem hebt leren werken dan kun je het ook met de hand.

*5. De ouders*
Een van de aanwezige wiskundedocenten, Swier Garst, vertelde dat hij dit jaar naast examenklassen ook weer eens een brugklas had, conform het beleid van de wiskundesectie. En dat de sectie had afgesproken ook expliciet aandacht aan rekenen en getalbegrip te besteden, nadat geconstateerd was dat leerlingen uit hun hoofd leerden dat $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{3} = 0{,}33$ en $\frac{3}{4} = 0{,}75$ en vergelijkbare eenvoudige gevallen. Op een voorlichtingsavond voor de ouders leidde de aandacht voor rekenen en getalbegrip tot veel commotie: breuken als $\frac{1}{3}$ en $\frac{5}{12}$ bestaan volgens de toen aanwezige ouders gewoon niet, alleen decimale getallen bestaan.

## Mogelijke oplossingsrichtingen

In de discussie werd al verwezen naar mogelijke oplossingen voor de algebraproblemen in het hbo in de richting van de inzet van computeralgebra al in het vo, het toetsen en trainen daarvoor en tot slot mogelijk minder stof maar dieper voor het vo-examen.

Een optie zou kunnen zijn om voor toekomstige bètastudenten al in het vo wat aan computeralgebra te gaan doen. Mijn studenten op het hbo-Engineering worden bij binnenkomst direct geconfronteerd met computeralgebra. Verschillende notaties voor differentiëren bijvoorbeeld leiden ertoe dat ze nu weten hoe het zit; ze kunnen nu beter differentiëren (met pen en papier) in geval er nog meer letters in het spel zijn behalve de variabele waarnaar gedifferentieerd moet worden. Bovendien weten ze nu onder woorden te brengen wat ze aan het doen zijn omdat daarop getoetst wordt bij het inleverwerk met computeralgebra.

Ook het taalgebruik zou zuiverder kunnen met bijvoorbeeld het oplossen van vergelijkingen. Zeg niet: 'los $x$ op', maar zeg gewoon: los de vergelijking op waarbij $x$ de onbekende is, of: maak $x$ vrij uit de vergelijking. Dan is het ook geen probleem meer om de optie 'solve' te gebruiken in een CAS-situatie (aspect 4). Het opschrijven en verantwoorden van het oefenen en rekenen met modellen wordt met een CAS waarin ook een tekstverwerker zit gemakkelijker en beter te controleren en te beheersen. Ook de organisatie van de berekeningen kan beter met een CAS. Voorwaarde is wel dat er algebraïsche vaardigheden bij de studenten aanwezig zijn voor een goed gebruik van computeralgebra. Daarop zal ook Janssens in zijn vervolgartikel ingaan.

Er zou globaal genomen op twee duidelijke fronten getoetst kunnen worden, niet alleen in het vo maar ook bij bètastudies in het vervolgonderwijs.
- *Vaardigheidstoetsen* die de leerlingen en studenten dwingen om te abstraheren en formulevaardig te worden en dat te onderhouden. De rekenregels die ontdekt zijn bij het hanteren van realistische problemen worden daarmee ook buiten de context goed ingeslepen en onderhouden en kunnen weer operationeel gemaakt worden voor nieuwe contextproblemen. Dit soort toetsen kunnen afgenomen worden op een centrale manier of diagnostisch als oefenmateriaal, liefst digitaal maar zonder middelen behalve pen en papier. (Dan ben je ook af van toelaatbaarheid van verschillende merken rekenmachines bij officiële examens.)
- *Modelleren* aan de hand van een realistische context (in samenwerking met andere bètavakken in het vo en het hbo) in de vorm van groepswerk met behulp van een CAS mét *tekstverwerker* en eventuele andere middelen die voorhanden zijn om het probleem te tackelen. Dit kan op het vo in het schoolexamen beoordeeld worden. Groepswerk bevordert de communicatie en het (wiskundig) taalgebruik actief! Op toetsen zal Zwaneveld in zijn vervolgartikel verder ingaan.

Tot slot zou ik willen verwijzen naar Euclides 78-4 (januari 2003) waarin tal van artikelen staan die verwijzen naar mogelijke oplossingen van het probleem dat we nu ondervinden in het hoger onderwijs.

*Over de auteur*

*Metha Kamminga is werkzaam bij de Noordelijke Hogeschool Leeuwarden en geeft wiskundeles bij Engineering met gebruikmaking van de digitale leeromgeving Blackboard. Op het moment is zij tevens betrokken bij een project op deze hogeschool dat de wiskunde wil gaan digitaliseren met digitale toetsen, computeralgebra en digitaal oefenmateriaal.*
*Zij is bestuurslid van de NVvW en voorzitter van de werkgroep-hbo, en tevens bestuurslid van het KWG en van het NOCW. Haar homepage is www.tech.nhl.nl/~kamminga.*

# LEERLING, STUDENT, DOCENT

## Terugkijken op wiskundeonderwijs

[ David van de Beld ]

### Inleiding

1992. De eerste les op 'de middelbare school' was een wiskundeles. Mijn leraar was naar het brugklaskamp gekomen en had zich in een jarentachtigtrainingspak gehesen om ons enthousiast te maken voor het vak.

2002. Ik maak mijn debuut als wiskundedocent. Voor de gelegenheid en de goede indruk die ik wil maken heb ik m'n leukste kleren maar aangetrokken.

In tien jaar tijd heb ik drie verschillende vormen van wiskundeonderwijs meegemaakt. Kritisch terugkijken levert in eerste instantie veel vragen op. Wat vond ik zelf eigenlijk leuk aan wiskunde; is er een ontwikkeling of verplaatsing geweest in mijn wiskundige interesse? Antwoorden zijn persoonlijk, maar in mijn wiskundige kring heb ik gemerkt zeker niet alleen te staan met mijn ervaringen.

### Lievelingsvak

Op de basisschool vond ik rekenen al leuk om te doen. Vanaf de brugklas werd wiskunde direct mijn lievelingsvak. Rekenen met variabelen, het oplossen van vergelijkingen; het waren puzzels voor mij, het oplossen gaf me een kick. De wiskundeolympiade - wat heerlijk om drie uur ongestoord te kunnen werken aan prikkelende opgaven. Het hoeft niet praktisch te zijn, het gaat om het analytisch denkvermogen dat wordt aangesproken. Bij de kick bleef het niet. Na de olympiade wilde ik direct met anderen praten over de opgaven. Ik nam anderen graag mee in mijn denkwereld, mijn enthousiasme moest ik uiten.
Mijn school had voldoende aandacht voor het aspect 'prikkelende opgaven'. De leergang voldeed daarin behoorlijk, de wiskundeolympiade stond op het programma en we konden onder begeleiding wat extra vergelijkbare problemen oefenen. Een gemis was het andere, het delen van mijn enthousiasme. Ik had wel wat geïnteresseerde klasgenoten aan wie ik soms mijn enthousiasme opdrong, maar ik had graag méér gewild. Uitleggen, ook al was het aan leerlingen van lagere klassen, zou ik ongetwijfeld fantastisch hebben gevonden.

### Teleurstelling

Na mijn schooltijd lag de universiteit voor de hand en het werd de studie wiskunde, ook al geen verrassing. Het zou anders zijn dan ik gewend was, werd me verteld bij de voorlichting, maar ook wel heel erg leuk. Het was anders, dat zeker, maar wat is nou het fundamentele verschil tussen wiskundeonderwijs op het vwo en aan de universiteit? Tijdens de studie werd wiskunde breder dan ik me voor mogelijk had gehouden, problemen werden moeilijk, de computer ging een grote rol spelen.
Groter dan vakinhoudelijke zaken was het verschil in didactiek. Ik ben af en toe teleurgesteld tijdens mijn studie en ik probeer de belangrijkste reden hiervan duidelijk te maken.

Wiskunde prikkelt mij, maar niet voor 40 uur in de week; dat werd me wel duidelijk. Toch vind ik dit te kort door de bocht. De prikkel kan versterkt worden door je omgeving en door docenten. Dit laatste is aan de ene kant heel goed, het is prettig dat je als docent leerlingen kunt uitdagen. Aan de andere kant is het jammer dat niet elke docent hiertoe in staat is, terwijl de docent naar mijn mening hier wel verantwoordelijk voor is.

Daar liggen de wortels van mijn teleurstelling in mijn studie. De twee aspecten die mijn interesse wekken, waren wel sterk genoeg om voldoende positief te zijn om mijn studie af te ronden. Het positieve was de omgeving, er waren geïnteresseerde mensen met wie ik mijn enthousiasme kon delen. De opleiding Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen was weinig gericht op samenwerking tussen studenten. Gelukkig is hierin ook verandering gekomen, maar die kwam voor mij te laat. De samenwerking zocht ik zelf en heb ik gevonden. Daarnaast ben ik studentassistent geworden. Het was leuk om andere studenten te helpen en hun het mooie van de wiskunde te laten zien.

Echter, je kunt enthousiasme pas delen als je het zelf voelt en daar ontbrak het wel eens aan. Ik ben veel problemen tegengekomen die moeilijk genoeg waren

om me helemaal in vast te bijten, maar de prikkel om dat te doen ontbrak vaak. Bovendien was het oplossen van het probleem een verplichting, wat natuurlijk ook van invloed is op de beleving van het oplossings-proces. Waar ligt het probleem, wat ging er fout tijdens de colleges?
Mijn eerste opmerking hierover moet zijn dat er een groot verschil te vinden is in de didactische vaardig-heden van docenten. Ik heb docenten gehad die prima weten hoe ze studenten moeten prikkelen, uitdagende opgaven als toetsmiddel gebruiken en aanvoelen hoe hun uitleg van de stof overkomt. Maar er is ook een groep docenten die dit niet kan of in ieder geval niet doet. Hoorcolleges van deze docenten zijn dikwijls een samenvatting van het te leren boek of dictaat met behoud van de structuur. Dat wil zeggen dat er een stelling op het bord geschreven wordt en dat daarna het bewijs volgt. Deze heldere structuur past bij het gestructureerde denken van wiskundigen, is handig wanneer dergelijke stellingen in boeken moeten worden opgezocht, maar is het ook de structuur die past bij het doceren van wiskundige theorie?

## Prikkelen!

Het antwoord op die vraag is voor mij duidelijk ontkennend. Bij de stelling-bewijs-structuur wordt eerst de oplossing van de puzzel gegeven en komt het probleem pas daarna. Toch is het noodzakelijk om studenten in aanraking te brengen met deze structuur. Hiermee wordt tegenwoordig eigenlijk al begonnen bij de Euclidische meetkunde in de Tweede Fase. Docenten die wiskunde-B2 onderwijzen, zullen hun lessen echter niet geven met een stelling-bewijs-structuur. De prikkeling voor een probleem wordt opgewekt door het probleem in te leiden, de context uit de praktijk erbij te halen, moeilijkheden aan te stippen enzovoort. Daarbij kunnen verschillende ideeën aangedragen worden als het nodig is de leerling of student de goede richting te wijzen. In de ideale situatie leert de leerling of student de theorie door deze zelf te ontdekken. Dit gebeurt al veel meer in het voortgezet onderwijs, maar aan de universiteit is de druk nog hoger om veel theorie aan te bieden en kost het zelf ontdekken te veel tijd.

Tijd is geen reden om vast te houden aan de stelling-bewijs-structuur. Het kost even veel tijd om een probleem voor te leggen, al vertellend het bewijs te geven of te schetsen en de stelling te concluderen. Het puzzeltje, de prikkeling van het probleem wordt op deze manier niet kapotgemaakt door met de oplossing te beginnen.

## Leraarschap

Mijn interesse in onderwijs leidde tot de afstudeer-richting 'Educatief Ontwerpen'. De daarbij behorende onderwijsstages waren interessant en ondertussen kreeg ik een kleine aanstelling op een school. Dit gaf mij veel voldoening. Mijn enthousiasme kon ik kwijt aan leerlingen en ook andere aspecten van het leraarschap spraken mij aan. De progressieve school waar ik lesgaf was intensief bezig met onderwijs-vernieuwing, actieve werkvormen; het is fantastisch om te zien dat er goede ontwikkelingen in de wiskundedidactiek gaande zijn.

Het onderwijs heb ik ondanks dat in 2003 vaarwel gezegd. Op andere beroepen had ik mij namelijk niet georiënteerd, en daardoor koos ik er voor na mijn studie Wiskunde eerst de studie Technische Wiskunde te gaan doen. De oriëntatie lijkt succesvol, het lijkt te gaan resulteren in een diploma en heeft zeker geleid tot het inzicht dat onderwijs geven mij veel meer prikkelt dan onderzoek doen.
In augustus begin ik aan de lerarenopleiding en zal ik ook weer voor de klas te vinden zijn. Aan de situatie in het universitaire onderwijs kan ik dan niet veel doen, wel neem ik me voor leerlingen de kans te geven enthousiasme over te brengen. De universiteit kent het fenomeen studentassistent al jaren, het zou in het voortgezet onderwijs een groot succes kunnen worden. Dit past prima bij zelfstandig werken. Een school kan de keuze maken voor meerdere ingeroosterde uren zelfstandig werken. Eén docent en een aantal oudere leerlingen kunnen dit uur meerdere klassen begeleiden. Verder kunnen deze 'leerlingassistenten' ingezet worden wanneer een docent extra hulp nodig denkt te hebben. Ik stel me daarbij vooral uren voor waarbij de computer een grote rol speelt en één docent eigenlijk niet voldoende is. Ook individuele begeleiding voor leerlingen met een achterstand is mogelijk; hiervoor heeft een docent immers zelden tijd.
Wellicht zijn er al ervaringen, ik zou ze graag horen.

*Over de auteur*

*David van de Beld (e-mail: davidvandebeld@hotmail.com) studeerde vorig jaar af in de richting Educatief Ontwerpen bij de opleiding Wiskunde aan de Rijksuniversiteit Groningen. Zie ook het artikel 'De laptopklas' in Euclides 78-7 (mei 2003). Hij gaf les op het Röling College in Groningen. Op dit moment is hij bezig met zijn afstudeeronderzoek van de opleiding Technische Wiskunde.*





FOTO 1 Sacha van Looveren, ontwerpster van o.m. het Meterspel

# UITSLAG WISKUNDE SCHOLEN PRIJS 2004

[ Heleen Verhage ]



FOTO 2 Prijsuitreiking op het Kennemer Lyceum

De Wiskunde Scholen Prijs is voor het eerst uitgereikt in 2002. De prijs is ingesteld om scholen voor voortgezet onderwijs te stimuleren, met hun sterke punten op het gebied van wiskundeonderwijs naar buiten te treden. De scholen kunnen meedingen naar een prijs in één van de categorieën basisvorming (klas 1 en 2), bovenbouw vmbo (klas 3 en 4) en havo/vwo (de klassen 3 t/m 6).

De inzendingen in 2004 waren afkomstig van 12 scholen. Omdat er maar weinig inzendingen waren in de twee laatste categorieën, heeft de jury besloten geen onderscheid tussen categorieën te maken en alle inzendingen gezamenlijk te beoordelen.
Er zijn twee prijzen toegekend, beide van € 750,00. De winnende inzendingen zijn:

- *SGS Math Enrichment Courses* van het Maartens College in Groningen.[1]
Leerlingen van klas 1, 2 en 3 van de internationale afdeling en van het tweetalig onderwijs op deze school doen jaarlijks een cursus naar keuze uit het aanbod voor 'Math Enrichment'. Dit aanbod bestaat uit 12 verschillende Engelstalige cursussen, met onderwerpen als codes, optische illusies, fractals, logica, het vier-kleurenprobleem. Groepen van maximaal 12 leerlingen uit verschillende klassen zijn 12 weken een lesuur per week met zo'n onderwerp bezig. De docenten stellen de cursussen zelf samen, gebruik makend van diverse bronnen (internet, boeken, tijdschriften, kranten). Elk jaar worden er een paar cursussen bijgemaakt. Doel is om de leerlingen te inspireren en ervan te overtuigen dat wiskunde een vak is waarvan je kunt genieten en een vak met veel nuttige toepassingen.

- *Wiskunde door het vizier van een scholier* en *Wiskunde, inspanning of ontspanning?* van het Kennemer Lyceum in Overveen.
Het eerste project, Wiskunde door het vizier van een scholier, bestaat uit twee onderdelen: de lessenserie 'Afval' en het 'Meterspel'. De lessenserie 'Afval' vervangt een hoofdstuk uit het boek. Leerlingen gaan in groepen aan de slag met verpakkingsmaterialen en maken een inschatting van de hoeveelheid afval die ze op school produceren. Het meterspel is een aanvulling op het hoofdstuk over het metriek stelsel. Het spel traint de vaardigheden van het omrekenen en vergroot het gevoel voor bepaalde maten. Door middel van vragenkaartjes kunnen leerlingen op een meterlat afstanden winnen of verliezen. De leerling die als eerste zijn meterlat helemaal gevuld heeft, heeft gewonnen. Het spel is te vinden op *www.virtueleschool.nl*. Het doel van dit project is om wiskunde binnen de belevingswereld van de leerlingen te plaatsen. Elk jaar wordt een hoofdstuk uit het boek vervangen door een eigen lessenserie of voorzien van extra eigen materiaal.
Het tweede project, Wiskunde, inspanning of ontspanning?, heeft als thema spelletjes met een wiskundige achtergrond. De spellen die tot nu toe in het project zijn opgenomen zijn: foamkubussen, Quarto, Set, Land van Oct en Geheimtaal. De spellen zijn niet zelf bedacht, maar wel aangepast voor de eigen situatie. De spellen zijn mede bedoeld voor leerlingen die extra uitdaging nodig hebben om wiskunde leuk te blijven vinden.

De prijsuitreiking op het Kennemer Lyceum heeft inmiddels plaats gevonden, die op het Maartens College moet nog.
In komende nummers van Euclides zullen de winnende inzendingen nader worden besproken.

*Noot*

*[1] SGS = Small Group Subjects*

*Over de auteur*

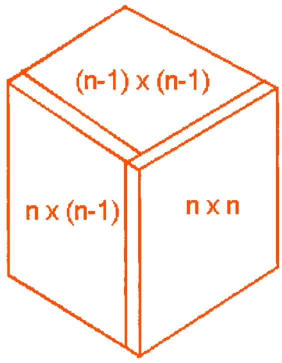
*Heleen Verhage (e-mailadres: h.verhage@fi.uu.nl) is sinds 1 januari jl. Manager Beheer van het Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht. Eerder was zij o.a. betrokken bij het WisKids-project.*

De Wiskunde Scholen Prijs is ontstaan uit het WisKids-project, dat inmiddels beëindigd is. De doelstellingen van WisKids zijn nog steeds actueel: het bevorderen van enthousiasme voor wiskunde bij jongens en meisjes van tien jaar en ouder en het imago van de wiskunde verbeteren. WisKids was een gezamenlijk initiatief van het Wiskundig Genootschap, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs.
Voor meer informatie zie www.fi.uu.nl/wiskids.

# CHRISTELIJK GYMNASIUM UTRECHT WINT SCHOLENPRIJS

## Uitslag eerste ronde NWO 2004

[ Wim Laaper ]




FIGUUR 1



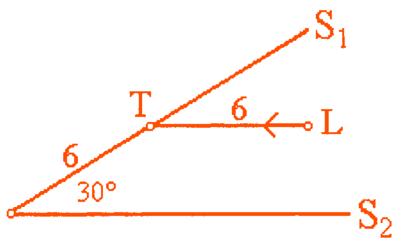
### Inleiding

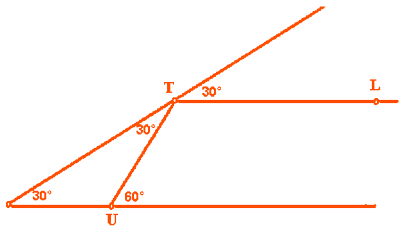
Ook dit jaar hebben weer zo'n 1000 leerlingen meegedaan aan de eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. Op 16 januari werkten zij op hun eigen school twee uur lang aan negen 'ongewone' wiskundeopgaven.
De 130 beste leerlingen gaan in september verder in de tweede ronde, die in Eindhoven zal worden gehouden.
Uit de eerste ronde volgen hieronder twee opgaven met hun oplossingen.

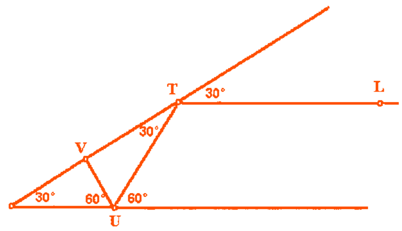
### Een tweetal opgaven

1. Een kubus bestaande uit $n^3$ onderling even grote kubusjes hangt in de ruimte.
Wat is het maximale aantal kubusjes, uitgedrukt in $n$, dat je vanuit één standpunt met één oog kunt zien?
*Oplossing*:
Zie figuur 1. Als je de kubus zo bekijkt dat je drie zijvlakken ziet, dan tel je op het eerste zijvlak $n^2$ kubusjes, op een tweede zijvlak $n(n - 1)$ nog niet getelde kubusjes en op het derde zijvlak $(n - 1)(n - 1)$ nog niet getelde kubusjes.
Totaal dus $n^2 + (n^2 - n) + (n^2 - 2n + 1) = 3n^2 - 3n + 1$ kubusjes.

2. Zie figuur 2. Twee spiegels $S_1$ en $S_2$ maken een hoek van 30° met elkaar. Vanuit een lichtbron $L$ vertrekt een lichtsignaal evenwijdig aan een van de spiegels naar de andere spiegel. Het lichtsignaal treft de andere spiegel in het punt $T$. De afstanden van $T$ tot de lichtbron en van $T$ tot de snijlijn van de spiegels zijn beide gelijk aan 6. Na een aantal reflecties komt het lichtsignaal weer door het punt $L$.
Welke afstand legt het lichtsignaal af vanaf zijn vertrek uit $L$ tot het moment dat het weer terug is in $L$?
*Oplossing*:
In figuur 3 staat getekend hoe het lichtsignaal aan de eerste spiegel weerkaatst wordt. Bij $T$ krijg je twee hoeken van 30°. Het lichtsignaal treft de tweede spiegel in het punt $U$. $TU$ maakt een hoek van 60° met de spiegel. Diezelfde hoek maakt het lichtsignaal bij het verlaten van de spiegel in $U$. Het gevolg is dat het signaal de eerste spiegel in $V$ loodrecht treft (zie figuur 4). Daardoor gaat het lichtsignaal via $U$ en $T$ weer naar




FIGUUR 2, FIGUUR 3

FIGUUR 4

*L* terug. De totale weg die het lichtsignaal aflegt wordt dus de lengte van het pad *LTUVUTL*.
$LT = 6$, $VT = 3$, dus $VU = \sqrt{3}$ en $UT = 2\sqrt{3}$.
De totale lengte wordt dus $2 \times (6 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}$.

## Uitslag

En dan was er ook weer de uitreiking van de scholenprijs, dit jaar gewonnen door het Christelijk Gymnasium Utrecht, op 18 maart in de aula van de winnende school. Met een flinke voorsprong op nummer twee werd deze school de winnaar. In onderstaand klassement wordt dat wel heel duidelijk. Tussen haakjes staat de naam van de wedstrijdleider van de school, dan het aantal deelnemers en de somscore.

| | | |
|---|---|---|
| Christelijk Gymnasium, Utrecht (S. Kaldeway) | 16 | 103 |
| Stedelijk Gymnasium, Breda (W. Cleven) | 34 | 89 |
| Zuyderzee College, Emmeloord (P.L.M. v.d. Heijden) | 73 | 88 |
| Stedelijk Gymnasium, Nijmegen (W. van Donk) | 44 | 84 |
| SG Augustinianum, Eindhoven (A. de Leuw) | 21 | 81 |
| RSG Pantarijn, Wageningen (M. van Haandel) | 69 | 81 |
| Bernardinus College, Heerlen (F. Houben) | 7 | 80 |
| Elzendaalcollege, Boxmeer (H. Alink) | 21 | 79 |
| Mencia de Mendoza Lyceum, Breda (P.A.J. Klijs) | 24 | 78 |
| College Hageveld, Heemstede (P.B. Zwetsloot) | 6 | 77 |
| Canisius College, Nijmegen (R. Klein Breteler) | 49 | 76 |
| Marnix College, Ede (W. den Ouden) | 12 | 75 |
| Plein College Van Maerlant, Eindhoven (T. Goossens) | 11 | 75 |

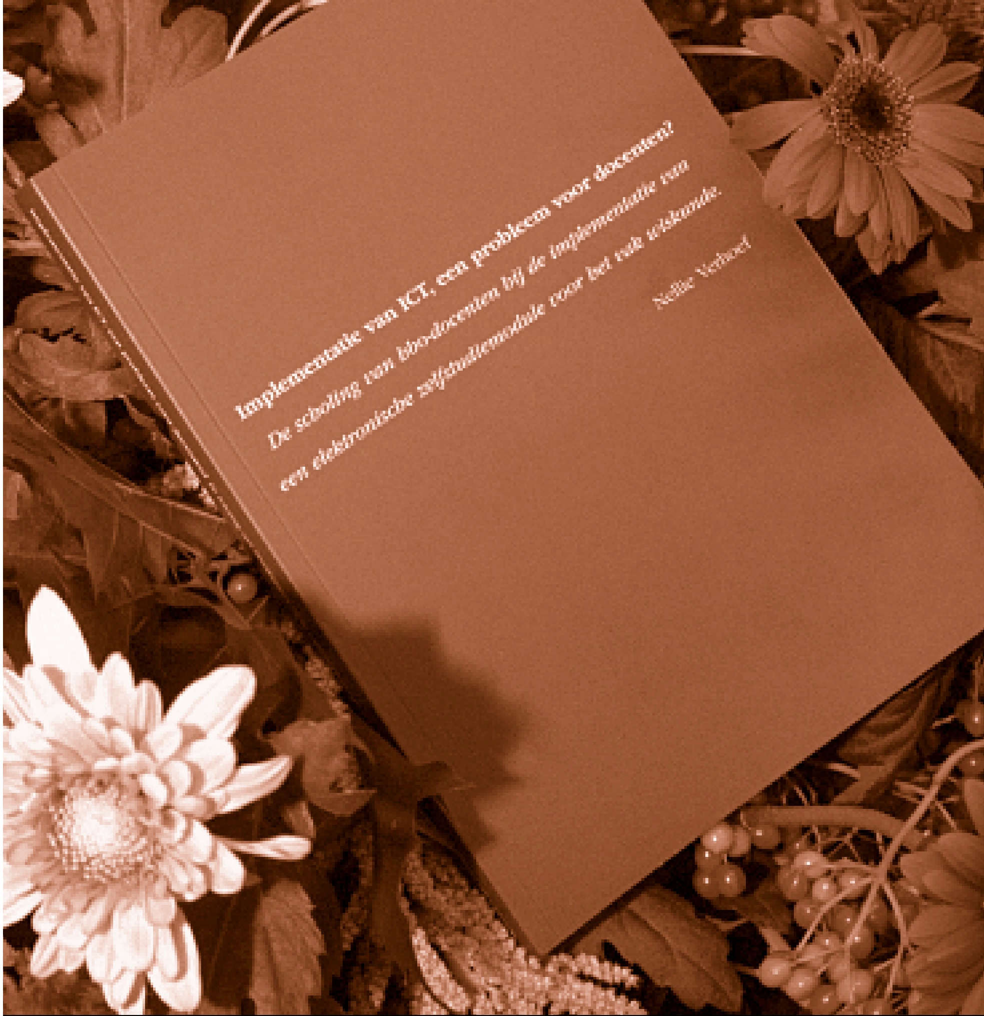
Ter gelegenheid van deze prijsuitreiking werd in de aula van het gymnasium De Grote Wiskunde Quiz onder leiding van professor Jan van de Craats gespeeld. De bijeenkomst werd op sfeervolle wijze omlijst door muzikale bijdragen van leerlingen van de school.

## Informatie

Nadere informatie over de Nederlandse Wiskunde Olympiade kunt u vinden op het internet: *http://olympiads.win.tue.nl/nwo/*. Hier zijn ook de diverse opgaven te vinden.


*Over de auteur*

*Wim Laaper (e-mailadres: wlaaper@iaehv.nl) is redacteur van Euclides en wiskundedocent aan het Koning Willem II College in Tilburg.*




# ICT: MIDDEL TOT ONDERWIJSVERBETERING OF BRON VAN IMPLEMENTATIEPROBLEMEN?

## Het proefschrift van Nellie Verhoef en het leren van docenten

[ Jos Tolboom ]

## Inleiding
Op 3 september 2003 promoveerde Nellie Verhoef op het proefschrift 'Implementatie van ICT, een probleem voor docenten?' tot doctor aan de Universiteit Twente (Verhoef, 2003). Zij beschrijft en analyseert daarin de scholing van docenten van de Christelijke Hogeschool Windesheim[1] bij de invoering van een digitale zelfstudiemodule voor beschrijvende statistiek (Tool Interactief Probleemoplossen/Statistiek ofwel TIP/s). Het proces van de scholing van de docenten om deze module te kunnen doceren wordt beschreven in dit proefschrift. De onderzoeksvragen die zij beantwoordt zijn:
1. Wat zijn de kenmerken van beoogde docentrollen bij het gebruik van TIP/s in de lespraktijk?
2. Wat zijn de kenmerken van adequate scholing van docenten voor het gebruik van TIP/s in de lespraktijk?
3. Wat zijn adequate randvoorwaarden ter ondersteuning van docenten bij het implementeren van TIP/s in de lespraktijk?

## Nut voor wiskundedocent?
De vraag die in deze bespreking centraal staat is:
Wat heeft een docent wiskunde aan de rapportage van dit onderzoek?
Beantwoording staat los van het feit dat het voor docenten altijd leerzaam is kennis te nemen van recente onderzoeksresultaten op het gebied van wiskunde, wiskundedidactiek, ICT-ontwikkelingen en onderwijskunde. Het proefschrift van Verhoef beslaat hoofdzakelijk het gebied van de onderwijskunde, met een stevige link naar de vakdidactiek. Het beschrijven van het proces van ontwikkelen van de module TIP/s zelf hoort nadrukkelijk niet bij de doelstelling van dit proefschrift. ICT wordt in dit proefschrift beschouwd als een middel waarmee gedoceerd wordt en dus als een factor die bepaalde randvoorwaarden vervuld veronderstelt.
Op het mogelijke feit dat leren met ICT didactische consequenties heeft, gaat dit onderzoek niet expliciet in. Invoering van TIP/s gebeurt wel aan de hand van een (aangepast) vijf-fasenmodel voor gebruik van ICT in de lespraktijk (Sandholtz, Ringstaff, Dwyer, 1997).

## Lerende docenten?
Interessant aan dit onderzoek is dat het zich concentreert op het leren van docenten. Eén van de meest onderschatte aspecten van het docentschap is het noodzakelijke lerende vermogen van docenten. Opmerkelijk is de tegenstelling tussen de perceptie van het beroep 'docent' voor waarnemers van buiten het onderwijs en die van binnen uit waar het gaat om 'lerend vermogen' als noodzakelijke competentie voor een goede docent. In 'Nooit meer slapen' (Hermans, 1966) zegt één van de hoofdpersonages Arne op bladzijde 153: 'Mijn schrikbeeld is altijd geweest leraar te moeten worden. Vijftig jaar lang elk jaar hetzelfde beweren. Je zou zo graag eens iets nieuws willen vertellen, maar het is je niet gegeven het te ontdekken.' Zoals Arne spreekt over het docentschap, zo denken vele buitenstaanders. Pikant in dit verband is het feit dat Hermans als lector in de fysische geografie was verbonden aan de Rijksuniversiteit Groningen, maar daar na vermeende wanprestaties in zijn onderwijs is ontslagen.
Docenten en anderen die het onderwijs van binnen uit kennen, weten dat er op veel gebieden (het vakgebied zelf, de didactiek van dat vakgebied, curriculumopbouw inclusief ontwikkeling van eigen - ook digitale - materialen, ICT-toepassingen, onderwijskunde, pedagogiek) voortdurende en snelle veranderingen plaatsvinden die de vakdocent direct raken. Lerend vermogen is een kerncompetentie voor een succesvolle docent. In de periode 1900-1970 was het niet ongebruikelijk dat een wiskundedocent dat bewees door zelf een proefschrift af te ronden. Waarom dat in onbruik is geraakt, is op zich weer een interessante onderzoeksvraag, tezamen met de vraag: welke effecten heeft onderzoekservaring op de kwaliteiten van een docent in het voortgezet onderwijs?
Dat ook ervaren wiskundedocenten nooit zijn uitgeleerd, blijkt onder andere uit het onderzoek van Teeninga (Teeninga, 2003). Hij concludeert hierin onder meer dat er wiskunde-inhoudelijke onderwerpen (bijvoorbeeld voortgezette meetkunde bij 25% van de respondenten en discrete dynamische modellen bij 35% van de respondenten) en wiskundedidactische onderwerpen (bijvoorbeeld werken met de grafische rekenmachine bij 64% van de respondenten en begeleiden en beoordelen van praktische opdrachten en profielwerkstukken bij 83% van de respondenten) zijn die in hun opleiding weinig of geen aandacht hebben gehad. Goed voorbereiden (35%) en overleg met collega's (41%) zijn de meest gevolgde inhoudelijke scholingsmethoden. Hij signaleert nog tal van andere inhoudelijke en didactische eisen waarvan wiskundedocenten erkennen dat zij daaraan niet vanuit routine kunnen beantwoorden. Duidelijk is dat de 10% van de werktijd die in docenten in het voortgezet onderwijs volgens de CAO aan hun scholing mogen besteden:
- te weinig is gezien de hoeveelheid hierboven genoemde aandachtsgebieden,
- bovendien vaak al daar de schoolleiding is ingevuld met algemeen-onderwijskundige scholing of, erger nog, vergadertijd voor de vele teams waarin docenten tegenwoordig zitting hebben.
Het waardevolle van het proefschrift van Verhoef is dat nauwgezet en van bijna microscopische afstand wordt gevolgd hoe docenten zich een nieuwe aanpak van een module eigen maken. De gekozen opzet van de scholing van docenten wordt zeer goed vanuit de literatuur gemotiveerd.

## Resultaten van het onderzoek
De conclusies van het proefschrift zijn helaas niet positief te noemen.
Op instellingsniveau speelden er twee belangrijke zaken op de Christelijke Hogeschool Windesheim. In de beleidsnota 'Een reis' (1995) werd de transformatie geschetst van de instelling van 'School voor Hoger Beroepsonderwijs' naar 'Leerplaats voor Hoger Beroepsleren'. Daarnaast ging de CHW over van

5 faculteiten naar 26 opleidingen. Iedere opleiding kreeg een eigen opleidingsmanager. Omdat de betrokken docenten verspreid waren over veel opleidingen waren er dus ook nogal wat nieuwbakken opleidingsmanagers bij de implementatie betrokken. Hun inzet om dit proces tot een succes te maken wisselde sterk. De situatie ten tijde van het onderzoek was dus complex, maar is de situatie van de onderwijspraktijk dat niet altijd? De perfecte laboratoriumsituatie, waarin 'ceteris paribus' experimenten worden gedaan (alleen de te onderzoeken variabele varieert en de rest blijft constant), bestaat niet. 'Er is altijd wel wat', verzucht de docent in de gang. Dus ook gezien de turbulente fase van de CHW ten tijde van het onderzoek zijn de resultaten van het onderzoek in mijn optiek teleurstellend.

Allereerst voor wat betreft de docenten. Een letterlijke enkeling bleek, ondanks de desgevraagd persoonlijke begeleiding, zijn of haar opvattingen over leren en onderwijzen te hebben aangepast in de richting van de doelen van TIP/s. Uit het proefschrift rijst niet het beeld van een veranderingsgezinde, onderzoekende en leerbare docent. Drie van de bij het proefschrift behorende stellingen lijken uit deze conclusies voort te vloeien:
1. Mensen veranderen niet graag, daarom gedijt gedwongen scholing niet.
3. Docenten beschermen zichzelf door veel waarde te hechten aan autonomie.
4. Professionaliteit heeft in het woordenboek van de docent een andere betekenis dan in de nieuwe Van Dale.

Vervolgens de rol van het management. Omdat TIP/s een opleidingsoverstijgend project was, voelden de opleidingsmanagers zich niet verantwoordelijk voor het welslagen. Bovendien vonden zij extra tijd voor docenten voor het integreren van TIP/s in de lespraktijk niet nodig, omdat het een zelfstudiemodule betrof. Elders vermeldt de onderzoekster dat er problemen waren tussen studenten en een docent omdat de laatste er geen strakke e-maildiscipline op nahield; het lijkt mij daarom eerder een module voor afstandsleren dan een module voor zelfstudie. Dat maakt het gebrek aan facilitering voor docenten alleen maar ernstiger.
Stelling 2 lijkt hiermee te maken te hebben:
2. Het hbo gaat ten onder aan een gebrek aan inhoudelijk sturend management.

Tot slot de rol van ICT-beheer. Het beloofde multimedialokaal was niet in orde. De infrastructuur die nodig was om TIP/s soepel te laten verlopen, bleek niet te kunnen worden gegarandeerd, omdat de instellingsbrede implementatie geen prioriteit had voor de dienst ICT.
De volgende stelling lijkt hieraan gelieerd:
5. Verondersteld wordt dat ICT-middelen het onderwijs verbeteren. Uit dit proefschrift blijkt echter dat ICT-middelen steeds opnieuw implementatieproblemen geven.

Ik wil daarover nog wel het volgende opmerken. Uit dit proefschrift blijkt alleen dít ICT-middel implementatieproblemen gegeven te hebben. Die problemen zijn daarbij nog maar ten dele toe te schrijven aan de ICT-aard van het middel. Bovendien suggereert de stelling dat ICT altijd onderwijsverbetering in de weg staat, terwijl implementatieproblemen dat helemaal niet altijd impliceren. Ik zou zelfs de stelling aandurven dat iedere ICT-invoering gepaard gaat met implementatieproblemen, en dat de hedendaagse docent zich – als het even kan in samenspraak met de leerlingen - dient te bekwamen in het omgaan met deze problematiek.

Daarbij kwamen nog de opmerkingen van niet-deelnemende docenten die negatief ten opzichte van TIP/s stonden. De som van deze factoren en de interactie ertussen maken duidelijk dat de implementatie van de docentscholing voor TIP/s een zware klus is geweest.

## 'Dat komt mij bekend voor...'

De genoemde zaken zullen de ervaren docent niet bevreemden. De observatie van de onderzoekster dat zij de balans 'distantie-deelname' ten opzichte van het onderzoek liet doorslaan naar 'deelname' zal hem of haar evenmin verrassen. De distantie is voor de onderzoeker nodig om onbevooroordeeld naar het experiment te kunnen kijken. De onderzoekster geeft aan dat zij 'de ontwikkeling van de scholing zo sterk beïnvloedde dat zij zelf, als persoon, een onderdeel van de scholing was geworden'.
In lesgeven gaat het vaak niet anders. Hoewel voor beoordeling van leerlingen en studenten een zekere distantie nodig is, die ook van pas komt om het werk 'van je af te zetten', ervaart de betrokken docent een sterke zuigkracht van de deelnamekant.
Doordat de context van het onderzoek zeer 'Windesheim-specifiek' was, en door het feit dat de grote inzet van de onderzoekster in het scholings-implementatieproces de zaken die misliepen in de randvoorwaardelijke sfeer enigszins verdoezelen, is de generalisatiewaarde naar andere ho-instellingen beperkt. Toch kan het onderzoek aanwijzingen opleveren voor de opzet van vergelijkbare scholingsactiviteiten.
Dat de onderzoeksresultaten teleurstellend zijn, staat absoluut los van de waarde van het proefschrift. In dit type onderzoek is het verduveld lastig om niet met een rooskleuriger bril naar de uitkomsten te kijken dan eigenlijk toelaatbaar is. Nellie Verhoef weerstaat deze verleiding met glans: zij analyseert glashard wat er allemaal niet optimaal was en doet geen poging het mooier te laten lijken dan het was.

## Procesgericht toetsen en PLW's

Wat mij betreft nog interessanter dan de beantwoording van de onderzoeksvragen, zijn de aanbevelingen voor vervolgonderzoek die Verhoef doet op basis van haar onderzoek.

1. [NV:] Doe onderzoek naar de effectiviteit van de inzet van procesgericht toetsen [JT: toetsing die zich

richt op het proces van het leren] in een scholing om docentopvattingen te veranderen in de richting van de doelen van de curriculumverandering. In dit onderzoek bleek ontwikkeling, uitvoering en beoordeling van een procesgerichte toets een goed middel om docent-opvattingen te beïnvloeden.
[JT:]Steeds meer docenten realiseren zich het onderwijskundig belang van toetsen. Ontwerp van een curriculumonderdeel waarbij na de domeinbepaling eerst de toets wordt ontwikkeld is al tamelijk gangbaar. Webgebaseerde leeromgevingen, bijvoorbeeld, maken efficiënte afname van diagnostische toetsen mogelijk en kunnen bijzonder grote leereffecten genereren (Tolboom, nog te verschijnen). Bovendien zijn steeds meer docenten overtuigd van het procesgerichte karakter dat het bestuderen van wiskunde heeft. Niet het antwoord op de opgaven is het meest interessant, maar de gevolgde methodiek. Dan moet ook op die methodiek getoetst worden. Kortom, wat mij betreft een hele zinvolle aanbeveling.
2. [NV:] Onderzoek onder welke voorwaarden curriculumimplementatie in een professionele leer- en werkomgeving -waarin (aanstaande) docenten, opleiders, onderzoekers en opleidingsmanagers deelnemen- succesvol is. Meer over professionele leer- en werkomgevingen (PLW's) is te vinden bij Terlouw e.a. (2002).
[JT:] Voor de hand liggend is dat in deze zogeheten PLW's actiegericht onderzoek zal worden uitgevoerd. Actieonderzoek is de verzamelnaam van een aantal technieken om systematiek aan te brengen in het reflecteren en de uitkomsten om te zetten in keuzes en plannen voor het eigen handelen in komende situaties (zie Ponte, 2002). Het lijkt mij dat het initiatief voor het opzetten van PLW's moet liggen bij het Hoger Onderwijs, Pedagogische Centra en ontwikkelinstituten. Webgebaseerde communities kunnen waarschijnlijk een belangrijke rol spelen in het productief houden van PLW's. Ook deze aanbeveling lijkt mij de moeite van het opvolgen zeer waard.

## Wat kan ik als wiskundedocent hiermee?

Terug naar de centrale vraag van deze bespreking: 'Wat heeft een docent wiskunde aan de rapportage van dit onderzoek?'
In de eerste plaats zou het een leidraad kunnen zijn voor gewetensvragen: herken ik mezelf in het geschetste portret van de wiskundedocent? Ben ik daarmee tevreden? Zo niet, wat wil ik daar dan aan veranderen? Vervolgens in bredere kring: herken ik het beeld van het management en het beeld van ICT-beheer? Wanneer er een curriculum in mijn werkomgeving zou moeten worden veranderd, wat zouden we kunnen doen om het soepeler te laten verlopen dan in het beschreven onderzoek?
Daarnaast zijn de aanbevelingen van het onderzoek interessant voor de wiskundedocent:
- Wat doen wij binnen ons wiskundeonderwijs aan procesgericht toetsen? Vinden we dat een nuttig instrument? Zou het een plek kunnen krijgen in ons PTA? Hoe zouden we dat vorm willen geven?
- Is het voor mij/ons zinvol een professionele leer- en werkomgeving op te zetten? Is het ook mogelijk? Kunnen wij daarvoor steun (en dus facilitering) van het management krijgen? Hoe zouden we die PLW willen invullen? Zijn er onderzoekers die baat hebben bij onze PLW? Wie/welke instanties kunnen we daarvoor benaderen?
Zeker voor wat betreft dat laatste punt biedt de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek een interessante regeling: Leraar in Onderzoek[2]. In dit kader is het voor een eerstegraads docent uit het VO mogelijk een aantal maanden wetenschappelijk onderzoek aan een universiteit te verrichten. Het leren van docenten kan hierdoor een behoorlijke impuls krijgen. Nellie Verhoef doet in haar proefschrift behartigenswaardige aanbevelingen, waardoor de kans op succesvol leren voor en door docenten – op lange termijn - wordt vergroot.

*Nellie Verhoef: Implementatie van ICT, een probleem voor docenten? Proefschrift Universiteit Twente, Enschede (2003), ISBN 90-365-1938-1*

*Noten*

*[1] Zie www.windesheim.nl/*
*[2] Zie www.nwo.nl/subsidiewijzer.nsf/pages/NWOA_4XHBL7?Opendocument*

*Literatuur*


- *W.F. Hermans: Nooit meer slapen. De Bezige Bij, Amsterdam (1966).*
- *P. Ponte: Actieonderzoek door docenten. Dissertatie Universiteit Utrecht (2002).*
- *J.H. Sandholtz, C. Ringstaff, D.C. Dwyer: Teaching with technology, creating student centered classrooms. Teacher College Press, New York (1997).*
- *H. Teeninga: Zijn wiskundedocenten goed voorbereid op hun taak? Doctoraalscriptie, Instituut voor Wiskunde en Informatica, Rijksuniversiteit Groningen (2003).*
- *C. Terlouw e.a.: The development of a professional learning and working environment for academic science teacher education. Educational Research Days, Antwerpen (2002).*
- *J. Tolboom: Formative assessment in a webbased learning environment; a case study on learning gains. In voorbereiding.*


*Over de auteur*


*Jos Tolboom (e-mailadres: j.l.j.tolboom@fwn.rug.nl) is docent bètadidactiek aan de Rijksuniversiteit Groningen en ICT-redacteur van Euclides.*

# FEITENVEL ZAMBIA

## WwF-project in vogelvlucht

[ Ger Limpens / Wereldwiskunde Fonds ]

| | |
|---|---|
| Land | Zambia |
| Aanvrager | Arie van Kooten |
| Projectjaar | 2002-2003 |
| Projectschool | Kalwala Community Centre, Chinsali, Northern Province, Zambia. |
| Sociale situatie | Vanwege de aidsepidemie sterven veel mensen. In Zambia zijn nu bijna een miljoen aidswezen. Normaal gesproken worden weeskinderen door andere familieleden opgenomen, maar vanwege de grote aantallen is dit helaas niet meer mogelijk. Daarom is het Kalwala Community Centre opgericht. Het centrum omvat een weeshuis, een school en een kliniek.<br>Op het platteland van Zambia is de werkende generatie van 20 tot 40 jaar nagenoeg uitgestorven. Er is geen geldeconomie. Het is moeilijk om aan wiskundematerialen te komen. |
| Soort school | Een deel van het Community Centre wordt gebruikt als school voor aidswezen in de leeftijd van 7 tot 18 jaar. De school is sinds kort ook opengesteld voor kinderen uit naburige dorpen die tot nu toe niet naar school konden. Het aantal leerlingen is gegroeid tot 170. |
| Wiskundeonderwijs | Het onderwijs wordt gegeven door ongetrainde, maar gemotiveerde leerkrachten. Men concentreert zich voornamelijk op taalonderwijs (IciBemba en Engels) en wiskunde. Gestuurd door de aangeschafte materialen is het wiskundeonderwijs zeer praktisch van aard. Er wordt veel gedemonstreerd en er wordt in groepen gewerkt, hetgeen vrij uniek is in het noorden van Zambia. Ook is er een landbouwproject van start gegaan waarin de leerlingen hun wiskundige vaardigheden in de praktijk kunnen toepassen. |
| Ondersteuning | € 2700,00. Wiskundeboeken (Engels), rekenmachines, demonstratiemateriaal, wiskundige wandplaten en werkmateriaal (bord, krijt, papier, enzovoorts). |



**FOTO 1** Leerlingen van het Kalwala Community Centre



**FOTO 2** Lesmateriaal aangeschaft dankzij het WwF

# Jaarvergadering/Studiedag 2004

[ Marianne Lambriex ]

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

### Eerste uitnodiging

Dit is de eerste uitnodiging voor de jaarvergadering/studiedag 2004 van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op
**zaterdag 6 november 2004.**
Aanvang: 10.00 uur
Sluiting: 16.00 uur
Plaats: Oosterlicht College, Nieuwegein

### Agenda

Huishoudelijk gedeelte:
1. Opening door de voorzitter
2. Jaarrede door de voorzitter
3. Notulen van de jaarvergadering 2003 (zie een volgend nummer van Euclides)
4. Jaarverslagen (zie een volgend nummer van Euclides)
5. Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie en benoeming van een nieuwe kascommissie
6. Bestuursverkiezing
7. Bestuursoverdracht

Vervolg huishoudelijk gedeelte:
8. Rondvraag
9. Sluiting

### Voor wie welke wiskunde?

Al jaren verlangen we naar rust in het onderwijs zodat de storm van vernieuwingen en veranderingen die we als docenten hebben moeten verwerken, ook kan gaan liggen. Zodat we de tijd krijgen om de veranderingen tot verbeteringen te laten uitgroeien. Maar gezien de laatste ontwikkelingen is ons dat blijkbaar niet gegund. De kerndoelen van de basisvorming waren al bron van discussie, maar nu is ook de basisvorming zelf onderuit gehaald. Scholen mogen zelf bepalen welke vakken zij willen aanbieden en welke doelen zij daarbij willen bereiken.
Door het politieke geweld is ook de invulling van de NT/NG-profielen van de Tweede fase veel minder exact, worden de vier vakken wa1, wa12, wb1 en wb12 weer afgeschaft en moet er in 2007 gestart worden met WA, WAB en WB en ook dat in nog minder contacttijd.
Een nieuwe verworvenheid voor het management van scholen is de autonomie die ze van de regering hebben gekregen. Een autonomie die kan uitmonden in een totaal nieuwe school, met een nieuwe organisatie, al dan niet vakoverstijgend of vakdoorbrekend. Ook zijn er scholen die de vorm waarin het examen wordt afgenomen, willen veranderen en zijn er instituten die de inhoud van het examenprogramma willen veranderen.
Kortom, alle zekerheden zijn geen zekerheden meer en de rust is ver te zoeken.
In al die veranderingen zitten natuurlijk wel verborgen kansen om toch elke leerling die wiskunde te bieden die voor hem/haar noodzakelijk is. Maar welke wiskunde is dat dan?
Vandaar het thema van de studiedag, in de hoop dat we wat kunnen bieden dat voor u richting aan uw lessen kan geven. We denken verder ook aan subthema's als:
- Hoe ziet wiskunde in de nieuwe scholen eruit?
- Inzet van ICT.
- Welke wiskunde is zeker nodig in het vervolgonderwijs?
- Hoe is wiskunde te integreren in andere vakken?
- Actualiteit.

U ziet, er is voor een ieder wel iets interessants te vinden. Hoe het een en ander vorm gegeven wordt, laten we u in de volgende Euclides weten.

**Dus reserveer in uw agenda: zaterdag 6 november NVvW-dag!**

In het volgende nummer van Euclides kunt u gedetailleerd lezen wat u kunt verwachten op 6 november 2004. Voor meer informatie kunt u zich wenden tot Marianne Lambriex (*m.lambriex@nvvw.nl*)

## Studiedag met als thema

## 'VOOR WIE WELKE WISKUNDE?'

# Opgave 798

# Recreatie

[ Frits Göbel ]

## Puzzel 798 - Cirkels en bollen

Lang geleden had Leon Vié in de NRC (toen nog niet gefuseerd) een puzzelrubriek. Een van de puzzels ging over een ronde tafel in de hoek van een kamer, aan twee muren rakend. Een bepaald punt van de tafelrand is 40 cm van de ene muur verwijderd en 45 cm van de andere muur. De opgave is: Bepaal de diameter van de tafel. Het merkwaardige is dat er twee oplossingen zijn!

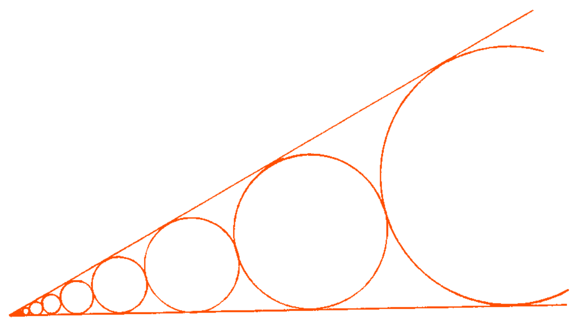
Hierdoor geïnspireerd kwam ik een paar jaar geleden tot de volgende opgave.
'Twee lijnen vormen een rechte hoek. De cirkel *C* met straal *R* raakt aan beide lijnen. Bepaal de oppervlakte van de cirkel die raakt aan *C* en aan de twee lijnen. Twee oplossingen!'
Deze opgave stond in de kalender van Vierkant voor Wiskunde, op 28 november 1999.

Je kunt deze vragen natuurlijk ook voor hogere dimensies stellen. We beperken ons tot de derde. In het eerste octant hebben we een rijtje bollen; de middelpunten liggen op de lijn $x = y = z$. Iedere bol raakt aan de drie coördinaatvlakken en aan twee andere bollen.

### Opgave 3
Bepaal de verhouding van de stralen van twee opvolgende bollen.

### Opgave 4
Welke fractie van het eerste octant wordt door bollen gevuld?

Het is niet nodig dat u een hele afleiding opstuurt; alleen de vermelding van de vier antwoorden is voldoende. Wel zou ik graag weten of u een of andere slimme truc hebt bedacht om tot een antwoord te komen.



FIGUUR 1

Het is niet de bedoeling dat u deze opgaven oplost. In onze rubriek gaan we een stapje verder. In figuur 1 ziet u een scherpe hoek $\alpha$, met daarin een rij rakende cirkels, naar links en naar rechts tot in het oneindige voortgezet.

### Opgave 1
Bepaal de verhouding van de stralen van twee opvolgende cirkels als functie van $\alpha$.

### Opgave 2
Welke fractie van het inwendige van de hoek wordt door cirkels bedekt?

Oplossingen kunt u mailen naar *a.gobel@wxs.nl* of per gewone post sturen naar F. Göbel, Schubertlaan 28, 7522 JS Enschede. Er zijn weer maximaal 20 punten te verdienen met uw oplossing.
De deadline is 20 augustus 2004.

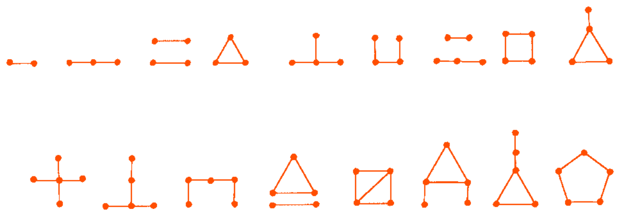
Veel plezier!

# Oplossing 796

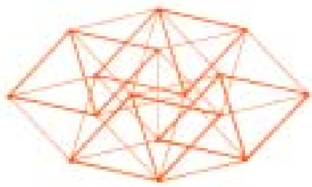
## Oplossing 'Afstandelijke zaken'

Er waren zeven inzendingen.
Opgave 1 heb ik overgenomen uit een boekje van Dick Hess, in 1996 in eigen beheer uitgegeven, getiteld 'Puzzles from around the world'. De constellaties, zes in getal, werden door bijna alle oplossers gevonden.
De tweede opgave gaf aanzienlijk meer problemen. Het aantal gevonden constellaties varieerde van 3 tot 26. In totaal zijn er 27. Het is vrijwel onmogelijk om er meer dan 20 te vinden zonder systematisch te werk te gaan. Dat kan heel handig met wat grafentheorie.

In figuur 3 ziet u een constellatie van 16 punten met 41 gelijke afstanden: 40 daarvan zijn lengten van lijnen in acht elementen in de vorm van een ruit met een diagonaal. De 41ste dankt zijn bestaan aan de beweeglijkheid van het ruitenstelsel en is door de streepjeslijn aangegeven. Laten we in deze constellatie een punt van de graad 4 weg, dan ontstaat een oplossing van opgave 3 met 37 gelijke afstanden. Dit is meteen een tegenvoorbeeld bij de bewering van een inzender die $n \cdot {}^{3}\log n$ aangeeft als bovengrens voor constellaties van $n$ punten.



FIGUUR 2



FIGUUR 3

We hebben 5 punten en daartussen 10 afstanden, die twee verschillende waarden mogen aannemen. Je kunt dit voorstellen in een graaf op 5 punten waarin je alleen de lijnen opneemt die corresponderen met de afstand die het minst voorkomt. In dat geval hebben we grafen op 5 punten met 5 of minder lijnen. Ze zijn niet noodzakelijk samenhangend, maar de losse punten (de triviale componenten) kun je wel meteen weglaten. Er zijn 17 mogelijkheden; zie figuur 2. In veel gevallen leidt een graaf tot twee oplossingen.

Leo van den Raadt en Wobien Doyer bepaalden ook de exacte lengten van de afstanden. Enkele oplossers spraken hun waardering uit voor deze opgave met de vermelding dat hij erg veel tijd kostte.
Opgave 3 kwam misschien daardoor een beetje in de verdrukking. De meeste inzenders vonden 31 gelijke afstanden, één kwam tot 36. Dat had ook ik eerst, maar het kan beter.

De top van de ladder ziet er nu als volgt uit:
T. Afman 200,
D. Buijs 194,
L. de Rooij 157,
A. Verheul 153,
L. v.d. Raadt 115,
J. Meerhof 114,
T. Kool 102.

De eerste prijs voor trouwe inzenders (een boekenbon van € 20,00) is, na loting, gewonnen door Ton Kool, de tweede (een boekenbon van € 15,00) door Dick Buijs.
Gefeliciteerd!

# Servicepagina

## *Kalender*

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in de komende jaargang.
Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld.
Doorgeven kan ook via e-mail:
*redactie-euclides@nvvw.nl*

| nr | verschijningsdatum | deadline |
|---|---|---|
| 1 | 16 september 2004 | 20 juli 2004 |
| 2 | 21 oktober 2004 | 7 september 2004 |
| 3 | 9 december 2004 | 26 oktober 2004 |
| 4 | 27 januari 2005 | 7 december 2004 |
| 5 | 3 maart 2005 | 18 januari 2005 |
| 6 | 14 april 2005 | 1 maart 2005 |
| 7 | 26 mei 2005 | 5 april 2005 |
| 8 | 23 juni 2005 | 10 mei 2005 |

Tot en met 26 september, Leiden
Tentoonstelling ‘Goochelen met getallen’
Organisatie Museum Boerhaave
Zie ook pagina 302 in Euclides 79-7.

1 en 2 juli, Oostende (België)
12e congres van de VVWL
Organisatie VVWL

28 juli t/m 2 augustus, Leusden
Zomercursus Wiskunde en Werkelijkheid
Organisatie Instituut voor Wijsbegeerte

19 en 20 augustus, Oostende (België)
T³ Europe Symposium
Organisatie T³-Vlaanderen

27 en 28 augustus, Amsterdam
3 en 4 september, Eindhoven
Vakantiecursus 2004: Structuur in Schoonheid
Organisatie CWI
Zie ook pagina 278 in Euclides 79-6.

zaterdag 6 november
Jaarvergadering/studiedag 2004
Organisatie NVvW

vrijdag 26 november
Wiskunde A-lympiade / Wiskunde B-dag
Organisatie Freudenthal Instituut

Voor nascholing zie ook
*www.nvvw.nl/nascholing.html*

Voor overige internet-adressen zie
*www.nvvw.nl/Agenda2.html*

Voor Wiskundeonderwijs Webwijzer zie
*www.wiskundeonderwijs.nl*

## Publicaties van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals
11. Schuiven met auto’s, munten en bollen
12. Spelen met gehelen
13. Wiskunde in de Islam
14. Grafen in de praktijk
15. De juiste toon
16. Chaos en orde
17. Christiaan Huygens

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW.
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).

Voor overige NVvW-publicaties zie de website:
*www.nvvw.nl/Publicaties2.html*

# redacteur vmbo m/v

De redactie van **Euclides** zoekt een redactielid dat het aandachtsgebied ***v m b o*** voor zijn of haar rekening kan nemen.

Taken

- zich actief op de hoogte stellen van actuele ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs, met name ‘in en om’ het vmbo;
- contacten leggen met potentiële auteurs;
- actief genereren van artikelen met betrekking tot wiskundeonderwijs in het vmbo;
- beoordelen, becommentariëren en incidenteel redigeren van kopij, en hierover adviseren aan de hoofdredacteur;
- verzorgen van rapportages (bijvoorbeeld van conferenties en studie-dagen) en interviews;
- deelnemen aan de redactievergaderingen (driemaal per jaar).

Gezien de werkzaamheden is het wenselijk dat het nieuwe redactielid zelf ook werkzaam is als wiskundedocent in het vmbo.

Redactieleden ontvangen een onkostenvergoeding.

**Euclides** is het vakblad voor de wiskundeleraar, en tevens orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Redactieleden van **Euclides** worden formeel door het bestuur van de NVvW benoemd.

Belangstellenden kunnen zich voor nadere informatie over de werkzaamheden wenden tot de hoofdredacteur:

Marja Bos, Mussenveld 137, 7827 AK Emmen,
e-mailadres: *redactie-euclides@nvvw.nl*,
tel. 0591-633831

of zich als geïnteresseerde aanmelden bij de redactievoorzitter:

Gert de Kleuver, De Splitting 24, 3901 KR Veenendaal,
e-mailadres: *g.de.kleuver@wanadoo.nl*,
tel. 0318-542243